

*В помощь преподавателю*

## **Лаборатория компьютерного моделирования**

### **Введение. Моделирование в обучении физике**

В наши дни трудно представить себе, как это раньше ученые жили и работали без компьютеров. Объемы информации, получаемой в экспериментах на современном оборудовании, столь велики, что «переварить» ее без предварительной автоматизированной обработки компьютерами в принципе невозможно. Компьютеры приносят исследователю неоценимую пользу как при обработке результатов измерений, так и непосредственно при проведении физического эксперимента. Компьютерное управление экспериментальными установками и ходом эксперимента позволяет сделать современную физическую лабораторию с уникальным оборудованием потенциально доступной большому числу пользователей благодаря возможностям дистанционной работы через Интернет.

Благодаря компьютерам постепенно меняется облик не только исследовательских, но и учебных физических лабораторий, хотя происходит это, к сожалению, значительно медленнее, чем хотелось бы. Тем не менее, важная роль компьютерного управления экспериментом и необходимость автоматизированной обработки результатов измерений даже в учебной лаборатории признается всеми, и в недалеком будущем соответствующие перемены неизбежны.

Не столь очевидна ситуация с компьютерным моделированием. Все признают, что компьютерные тренажеры и имитаторы очень полезны на стадии подготовки к выполнению достаточно сложного реального эксперимента. Но о полном взаимопонимании среди педагогов относительно роли моделирования физических явлений при обучении физике говорить пока не приходится.

Общим местом стало утверждение о том, что при обучении физике компьютерное моделирование ни в коем случае не должно подменять собой настоящую физическую лабораторию и вытеснять реальный эксперимент. С этим трудно не согласиться. Тем не менее в преподавании физики компьютерное моделирование может прочно занять вполне определенную нишу. Речь идет не только о численном моделировании экспериментов, которые по тем или иным причинам не могут быть выполнены в условиях учебной физической лаборатории, и поэтому моделирование неизбежно. Но даже моделирование физических явлений, в принципе доступных непосредственному наблюдению и реализуемых в лабораторных условиях, имеет определенную педагогическую ценность. Компьютерное моделирование дает учащимся один из важнейших инструментов, облегчающих проникновение в тайны науки.

С точки зрения преподавателя, очевидное, лежащее на поверхности достоинство компьютерного моделирования заключается в возможности создавать впечатляющие и запоминающиеся зрительные образы. Такие наглядные образы способствуют пониманию и запоминанию важных деталей изучаемого явления в гораздо большей степени, нежели соответствующие математические уравнения. Моделирование позволяет придать наглядность абстрактным законам и концепциям, привлечь внимание учащихся к тонким деталям изучаемого явления, ускользающим при непосредственном наблюдении. Графическое отображение результатов моделирования на экране компьютера одновременно с анимацией изучаемого явления или процесса позволяет учащимся легко воспринимать большие объемы содержательной информации.

Интерактивный характер моделирующих компьютерных программ также является собой важный аргумент в пользу применения моделирования. При пассивном поглощении информации учащиеся быстро теряют интерес к предмету. Обучение становится намного эффективнее при необходимости управлять работой программы, часто взаимодействовать с ней и реагировать на ее запросы. Хорошая интерактивная компьютерная программа не должна вести учащегося по строго предопределенному пути, пусть даже и тщательно выверенному автором, а, напротив, должна предоставлять выбор из множества разнообразных возможностей. Но в то же время чрезмерная гибкость и интерактивность программы чревата определенными опасностями. Учащийся может потерять направляющую нить, случайным образом блуждая по многочисленным закоулкам разветвленной программы. Поэтому интерактивные программы учебного назначения должны быть достаточно хорошо структурированы и снабжены подробными методическими

материалами, чтобы студент не сбился с пути и не упустил из виду конечную цель учебного задания.

Для успешного использования моделирующих программ в сопровождающем учебном пособии должны быть приведены необходимые сведения из теории изучаемых явлений. В пособии должна быть описана принятая математическая модель явления, предложены теоретические задачи и сформулированы конкретные задания для экспериментальной работы на компьютере.

При проведении учебного курса, основанного на использовании компьютерных программ, преподавателю необходимо тщательно продумать последовательность изучения материала. Чаще всего в математизированных курсах за основу берется принцип «от простого к сложному». Однако в некоторых случаях может быть педагогически целесообразным отступление от такой последовательности с тем, чтобы сначала воспользоваться моделированием сложного, но физически значимого и интуитивно понятного явления с последующим раскрытием лежащих в основе закономерностей и постепенным углублением в необходимую для его описания математику. Такое обращение традиционной последовательности, помимо повышения мотивации к преодолению порою скучных азов изучаемой дисциплины, способствует формированию у учащегося некоторых пусть и расплывчатых, полунтуитивных, но очень полезных представлений о том, как «устроен мир», складывающихся на основе личного практического опыта, накопленного в том числе и при интерактивном использовании компьютерных симуляций.

Несомненно, что наиболее эффективные учебные моделирующие компьютерные программы должны представлять собой не просто электронное дополнение к традиционному учебнику, а по существу своего рода *настольную лабораторию* для индивидуальной интерактивной работы учащегося с математической моделью изучаемого физического явления. Если проводить параллель с экспериментальной физикой, то этому подходу соответствует работа на уже готовой и тщательно отлаженной экспериментальной установке. Студент получает возможность сосредоточиться на физике изучаемых явлений, не отвлекаясь на чисто технические проблемы моделирования. Моделирующие программы принципиально отличаются от традиционных компьютерных обучающих и контролирующих программ, так как именно при моделировании физических явлений по-настоящему используются предоставляемые компьютером уникальные возможности. В некоторых случаях компьютерное моделирование может даже подсказать пути нахождения аналитического решения поставленной задачи.

Моделирование достаточно сложных явлений может способствовать не только облегчению понимания определенного вопроса, но и, что не менее важно, развитию физической интуиции учащихся. Последующее обращение к математической модели, положенной в основу численного моделирования явления, может показать, что даже из очень простых предположений и фундаментальных закономерностей вытекает очень сложное поведение физической системы. Без обращения к компьютерному моделированию было бы чрезвычайно сложно увидеть, что простые математические уравнения приводят к столь сложному поведению. Для физика и инженера недостаточно знать только сами уравнения. Очень важно понимать, хотя бы на чувственном уровне, как эти уравнения «работают» в реальном мире в тех случаях, когда невозможно получить их аналитические решения.

Работа с моделирующими программами может составить основу для курсового или дипломного проекта, так как по своему характеру эта работа во многом сходна с небольшим научным исследованием, в котором студент играет активную роль.

Разумеется, отмеченные выше преимущества моделирования можно реализовать только при использовании высококачественных программных продуктов, специально разработанных для учебного процесса.

Включение в учебный процесс на физических и других естественнонаучных специальностях систематических занятий по компьютерному моделированию в той или иной форме (скажем, в форме учебной лаборатории моделирования) в качестве дополнения к традиционным формам – лекциям, семинарам и физической лаборатории представляется своевременным и совершенно необходимым. Весьма перспективно также использование моделирующих программ и сопровождающих их методических материалов в системе дистанционного обучения.

## Физические модели и численное решение уравнений

Окружающий нас мир физических явлений чрезвычайно многообразен и сложен. Чтобы продвинуться в познании этого мира, приходится использовать упрощенные математические

модели реальных физических систем. Как говорил один из основателей отечественной школы теоретической физики академик Яков Ильич Френкель, физик-теоретик по существу всегда рассматривает не само физическое явление, а карикатуру на него, т.е. сильно упрощенную схему явления. Попытка учесть все сделала бы неразрешимой задачу описания даже весьма простых явлений. Можно считать, что мы понимаем физическое явление, если мы в состоянии построить для него адекватную математическую модель. Например, для механического движения тела в заданных силовых полях (т.е. под действием известных сил) такая математическая модель дается основным уравнением динамики – вторым законом Ньютона. Конечно, совершенно необходимо, чтобы выбранная упрощенная модель сохраняла наиболее важные и самые характерные черты изучаемого реального явления.

В некоторых случаях в рамках принятой модели удастся получить точное или приближенное аналитическое решение поставленной задачи. Например, для движения тела (материальной точки) под действием единственной постоянной силы (скажем, для задачи о движении брошенного тела вблизи поверхности земли без учета сопротивления воздуха) такое решение дается хорошо известными формулами равноускоренного движения. Аналитическое решение уравнений динамики можно получить и для так называемой задачи Кеплера, в которой рассматривается движение материальной точки под действием центральной силы тяготения, убывающей обратно пропорционально квадрату расстояния от центра (задача о движении планеты вокруг Солнца или спутника вокруг Земли).

К сожалению, точные аналитические решения, подобные движению в однородном поле тяготения или кеплерову движению в центральном поле тяготения, редко встречаются в физике. При наличии возмущающих воздействий (скажем, сопротивления воздуха в первом примере или тяготения других планет во втором примере) дифференциальные уравнения движения тела становятся неинтегрируемыми, и аналитическое исследование движения неизмеримо усложняется. В таких случаях на помощь исследователю приходят численные методы решения уравнений движения, и проверить правильность своих представлений о реальном изучаемом явлении он может с помощью вычислительного эксперимента на компьютере.

*Вычислительный эксперимент – это метод изучения физического явления путем построения его математической модели и последующего численного исследования этой модели, позволяющего «проиграть» ее поведение в различных условиях.* Компьютерное моделирование может оказать существенную помощь как исследователю, прокладывающему путь в неизведанное, так и учащемуся, осваивающему новые для себя знания.

Поясним идею численных методов на примере расчета движения тела под действием сил, зависимость которых от положения и скорости тела известна. Примером такой физической системы может служить линейный осциллятор – тело на пружине, сила упругости которой пропорциональна ее удлинению ( $F = -kx$  — закон Гука), причем движение тела происходит с сопротивлением, сила которого пропорциональна скорости и направлена против скорости ( $F_{\text{тр}} = -\lambda v$ ). Пусть для некоторого момента времени (начального момента) известны положение  $x_0$  и скорость  $v_0$  рассматриваемого тела (т.е. известно его механическое состояние). Тем самым нам известны силы, действующие в этот момент на тело, и на основании второго закона Ньютона мы можем рассчитать ускорение тела  $a_0$  в этот момент. Считая это ускорение постоянным, по известным формулам равноускоренного движения можно приближенно найти скорость и положение тела через небольшой промежуток времени  $\Delta t$  («шаг» интегрирования):

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t, \quad x_1 = x_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_0 (\Delta t)^2. \quad (1)$$

Чем меньше шаг интегрирования  $\Delta t$ , тем меньше ошибка в определении  $x_1$  и  $v_1$ , происходящая от предположения, что движение в течение  $\Delta t$  происходит с постоянным ускорением  $a_0$ . Затем для рассчитанных значений  $x_1$  и  $v_1$  нового механического состояния в конце интервала  $\Delta t$  находим новые значения каждой из действующих сил, и с помощью второго закона Ньютона определяем ускорение  $a_1$  для следующего интервала времени  $\Delta t$ . Считая это новое ускорение  $a_1$  постоянным на протяжении следующего шага интегрирования, снова применяем формулы равноускоренного движения, в которых роль начальных значений положения  $x_0$  и скорости  $v_0$  выполняют уже вычисленные с помощью (1) значения  $x_1$  и  $v_1$ :

$$v_2 = v_1 + a_1 \Delta t, \quad x_2 = x_1 + v_1 \Delta t + \frac{1}{2} a_1 (\Delta t)^2. \quad (2)$$

Затем по той же схеме расчет повторяется еще раз для нахождения следующих значений положения тела и его скорости, и так далее. Таким путем можно проследить шаг за шагом все

движение. Чтобы найти изменение механического состояния тела за большой промежуток времени, придется разбить этот промежуток на большое число малых шагов  $\Delta t$ . Чем меньше размер каждого шага, тем точнее полученный результат. Но необходимое число шагов при этом увеличивается. За повышение точности результатов приходится платить увеличением объема вычислений. Практически такие расчеты удобно производить на компьютере.

Описанный выше простой алгоритм численного интегрирования уравнений движения (алгоритм Эйлера) имеет ряд недостатков. В некоторых случаях он ведет к накапливающимся ошибкам. Поэтому при практических расчетах на компьютере обычно используют более совершенные методы, например, метод Рунге – Кутты четвертого порядка. Современные компьютеры позволяют производить численное решение уравнений движения быстро и эффективно.

## Компьютерная лаборатория по физике колебаний

Проиллюстрируем роль моделирования в обучении физике на примерах практического применения двух программ из цикла «Физика колебаний». Цикл вместе с сопутствующими методическими материалами предназначен для учебной студенческой лаборатории компьютерного моделирования. В него включены важные в принципиальном и практическом отношении вопросы собственных, вынужденных и параметрических колебаний в простых линейных и нелинейных физических системах. Модульная структура компьютерных программ комплекса и учебного пособия допускают возможность разной глубины изучения материала. Поэтому комплекс может быть легко адаптирован к конкретным условиям различных вузов.

Комплекс программ «Физика колебаний» позволяет использовать возможности компьютерного моделирования для изучения колебаний как одного из наиболее важных разделов курса физики. Без преувеличения можно сказать, что колебания окружают нас всюду. Осциллирующие электрическое и магнитное поля приносят свет в наши глаза. Вибрирующий воздух приносит звуки к нашим ушам. Благодаря световым и акустическим колебаниям мы получаем большую часть информации об окружающем нас мире. Электромагнитные колебания (в частности, световые, или оптические колебания) лежат в основе всех современных электронных средств передачи и обработки информации. Значение колебательных процессов в природе и технике трудно переоценить.

Колебания в различных физических системах могут иметь совершенно разную природу. Тем не менее колебания разной физической природы имеют много общего. Изучение общих закономерностей всех колебательных процессов составляет предмет теории колебаний. Для облегчения понимания общих закономерностей колебательных процессов целесообразно начинать их изучение с наиболее простых систем, таких как груз на пружине или маятник в поле тяжести.

Выбор для моделирования именно механических колебательных систем не случаен – он продиктован важной в методическом отношении возможностью непосредственно отображать движение механических систем на экране компьютера, не ограничиваясь только фазовыми траекториями и графиками временной зависимости описывающих систему переменных. Визуализация движения с одновременным выводом графиков значительно облегчает понимание многих абстрактных концепций физики колебаний. Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Изменение во времени физических величин, характеризующих разные колебательные системы, описывается одинаковыми дифференциальными уравнениями. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, где все далеко не так наглядно. Например, разобравшись в происходящих на наших глазах колебаниях груза на пружине, можно по аналогии легко понять закономерности колебаний в электромагнитном контуре.

Моделирование позволяет получить запоминающиеся иллюстрации изучаемых физических явлений во всей их динамике, воспроизвести тонкие детали явлений, ускользающие обычно при непосредственном наблюдении. Можно изменить временной масштаб, варьировать в широких пределах параметры и условия эксперимента, моделировать ситуации, недоступные для изучения в натурном эксперименте. Графический способ отображения результатов моделирования облегчает усвоение больших объемов получаемой информации. Графики зависимости всех переменных от времени можно выводить на экран постепенно, одновременно с отображе-

нием движения самой системы. Это придает графикам особую наглядность и облегчает понимание общих закономерностей изучаемых процессов.

Подчеркнем, что компьютерные программы цикла «Физика колебаний» представляют собой своего рода настольную лабораторию и предназначены для изучения физики, а не информатики. Для работы с ними не нужно уметь программировать. Если проводить параллель с экспериментальной физикой, то этим программам можно сопоставить уже готовые и тщательно отлаженные экспериментальные установки. Важно лишь понимать, как и что именно измеряет тот или иной прибор, и совсем не обязательно знать детали его внутреннего устройства. Так и с нашими программами: поскольку вся работа по программированию уже выполнена заранее, мы можем сосредоточиться на физике изучаемых явлений, не отвлекаясь на чисто технические проблемы моделирования.

## Собственные колебания простых систем

Положение равновесия физической системы называется *устойчивым*, если силы, возникающие при отклонении от равновесия, стремятся вернуть систему в положение равновесия. Такие силы называют *восстанавливающими* независимо от их физической природы. Например, устойчиво равновесие груза, подвешенного на пружине. Устойчиво также нижнее положение маятника в поле тяжести. Если подобную систему вывести из равновесия (оттянуть вниз груз, подвешенный на пружине, отклонить в сторону маятник), возвращающая сила будет сообщать телу ускорение в сторону положения равновесия. По инерции тело проскакивает положение равновесия. Теперь восстанавливающая сила замедляет его движение. После достижения точки наибольшего удаления от положения равновесия (*точки поворота*) все движение повторяется в обратном направлении. В результате возникают колебания около положения устойчивого равновесия.

Таким образом, если физическую систему вывести из равновесия каким-либо внешним воздействием и затем предоставить самой себе, она будет совершать колебания, которые принято называть *собственными* или *свободными*. Подчеркнем, что собственные колебания могут происходить лишь в системах, обладающих устойчивым положением равновесия.

В отсутствие трения (или электрического сопротивления), т.е. в идеализированной *консервативной физической системе*, собственные колебания будут строго периодическими: через определенный промежуток времени, называемый *периодом*, состояние системы полностью воспроизводится. Такие *незатухающие колебания* происходят с неизменным размахом (амплитудой). При наличии трения, неизбежного в любой реальной системе, происходит *затухание* собственных колебаний, обусловленное диссипацией (рассеянием) механической (или электромагнитной) энергии.

Мы начнем с изучения собственных колебаний наиболее простой системы — так называемого линейного осциллятора, описываемого дифференциальным уравнением, в которое входящая функция и ее производные входят линейно (в первой степени). Для линейного уравнения существует аналитическое решение, детально обсуждаемое в следующем разделе. Но при компьютерном моделировании это решение не используется. Совпадение наблюдаемых результатов численного интегрирования с аналитическими предсказаниями может служить для подтверждения качества используемого программой алгоритма. Такая проверка придаст убедительность результатам моделирования нелинейных колебательных систем в последующих лабораторных работах, где использован тот же самый алгоритм.

## Линейный осциллятор

Наиболее простым закономерностям подчиняются колебания в *линейных системах*, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. Линейный или гармонический осциллятор — это любая система, в которой при смещении из положения равновесия возникает возвращающая сила, пропорциональная смещению. Механические примеры таких систем — груз на упругой пружине, подчиняющейся закону Гука, или маховик (ротор) с упругой спиральной пружиной, закручивающейся при его повороте вокруг оси, как у балансира механических наручных или карманных часов. Крутильные колебания такого торсионного линейного осциллятора моделируются в описываемых учебных компьютерных программах. Условное изображение торсионного пружинного осциллятора и его электромагнитного аналога — последовательного *LCR*-контура — показано на рис. 1.

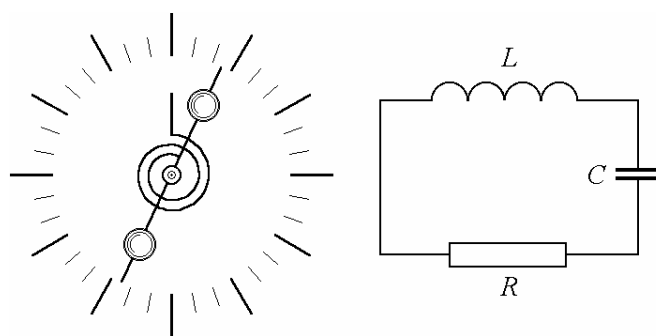


Рис. 1. Механический пружинный осциллятор (ротор со спиральной пружиной) и его электромагнитный аналог — колебательный контур.

Для удобства наблюдения крутильных колебаний в компьютерной программе можно выбрать опцию условного изображения системы, на котором вместо маховика в виде стержня с закрепленными на нем грузами показана только прикрепленная к ротору стрелка.

Дифференциальное уравнение, описывающее изменение со временем механического состояния осциллятора, совершающего собственные колебания, следует из основного закона динамики — второго закона Ньютона. В случае груза на пружине возвращающая сила  $F$ , действующая на груз со стороны пружины, пропорциональна смещению груза из положения равновесия:  $F = -kx$ . Коэффициент  $k$  в этом соотношении называется жесткостью пружины. В отсутствие других сил уравнение второго закона Ньютона принимает вид:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (3)$$

или, после деления обеих частей на массу  $m$ ,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{где } \omega_0^2 = k/m. \quad (4)$$

(Точкой над символом обозначено, как это обычно принято, дифференцирование по времени). Общее решение уравнения (4) представляет собой гармоническое (синусоидальное) колебание с произвольными амплитудой  $a$  и начальной фазой  $\delta$ :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \delta). \quad (5)$$

Крутильные колебания пружинного осциллятора, показанного на рис. 1, описываются точно таким же дифференциальным уравнением (4). При повороте маховика из положения равновесия на угол  $\varphi$  прикрепленная к нему спиральная пружина (другой конец которой закреплен неподвижно) закручивается и создает возвращающий момент  $N$ , пропорциональный углу отклонения:

$$N = -D\varphi. \quad (6)$$

Коэффициент пропорциональности  $D$  в (6) называется жесткостью пружины. Угол отклонения маховика из положения равновесия измеряется по неподвижной шкале при помощи стрелки, прикрепленной к маховику. В положении равновесия стрелка указывает на нулевое деление шкалы. Угол  $\varphi$  измеряется в радианах, хотя в моделирующей программе для удобства наблюдения шкала проградуирована в более привычных для нас градусах.

Применяя к движению маховика с моментом инерции  $J$  основное уравнение динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, получаем следующее дифференциальное уравнение собственных колебаний торсионного пружинного осциллятора:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi, \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (7)$$

Здесь введено обозначение  $\omega_0^2 = D/J$ . Общее решение уравнения (7) тоже представляет собой простое гармоническое колебание:

$$\varphi(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \delta). \quad (8)$$

Амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\delta$  в (8) зависят от начальных условий, т.е. от угла отклонения  $\varphi(0)$  и угловой скорости  $d\varphi/dt$  при  $t = 0$ . Другими словами, эти характеристики колебательного движения зависят от способа возбуждения колебаний. Колебания происходят с угловой частотой  $\omega_0$ , квадрат которой пропорционален жесткости пружины  $D$  и обратно пропорционален моменту инерции  $J$  маховика. Частота  $\omega_0$  и соответствующий ей период  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , в отличие от амплитуды и начальной фазы, не зависят от начальных условий — они целиком определяются свойствами самого осциллятора, т.е. значениями параметров осциллятора  $D$  и  $J$ . Собственные колебания линейного осциллятора всегда происходят с одной и той же собственной частотой  $\omega_0$  независимо от способа возбуждения. Независимость частоты собственных колебаний от начальных условий, а следовательно от амплитуды (и энергии) колебаний, называют *изохронностью* линейного осциллятора.

При моделировании колебаний линейного осциллятора в компьютерной программе период собственных колебаний в отсутствие трения  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  выбирается как естественная для осциллятора единица времени. Поэтому при работе с программой нет необходимости задавать ни момент инерции маховика  $J$ , ни жесткость пружины  $D$ , ни даже их отношение  $D/J = \omega_0^2$ , которым определяется собственная частота осциллятора. Угол отклонения ротора от положения равновесия при численном моделировании измеряется в радианах (но шкала и графики  $\varphi(t)$  для удобства проградуированы в угловых градусах), а угловая скорость  $d\varphi/dt$  ротора измеряется в единицах собственной круговой частоты  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  (в оборотах за период). При задании начальных условий угловую скорость ротора нужно также выражать в единицах  $\omega_0$  (а начальный угол отклонения — в градусах).

При наличии силы вязкого трения в дифференциальное уравнении осциллятора (7) нужно добавить тормозящий момент этой силы, пропорциональный угловой скорости ротора  $d\varphi/dt$ :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (9)$$

где *постоянная затухания*  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения в системе. Постоянная затухания  $\gamma$ , как и  $\omega_0$ , имеет размерность частоты.

Дифференциальные уравнения собственных колебаний *однородны*, так как искомая функция или ее производные присутствуют в одинаковой степени во всех членах уравнения. Однородность уравнений отражает отсутствие возбуждающей внешней силы. Таким образом, собственные колебания моделируемой системы описываются однородным линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Как и любое однородное уравнение, оно имеет тривиальное нулевое решение  $\varphi(t) = 0$ ,  $d\varphi(t)/dt = 0$ . Такое решение соответствует отсутствию начального возбуждения (нулевым начальным условиям) и описывает осциллятор, который постоянно находится в покое в положении равновесия. Собственные колебания осциллятора могут возникнуть только в результате некоторого начального возбуждения.

Если трение настолько слабо, что  $\gamma < \omega_0$ , общее решение уравнения имеет колебательный характер и может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi(t) = A_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta). \quad (10)$$

Это решение описывает затухающие колебания, амплитуда которых  $A_0 \exp(-\gamma t)$  экспоненциально убывает со временем. Начальная амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\delta$  определяются из начальных условий. Частота  $\omega_1$  периодического (косинусоидального) сомножителя и (10) дается следующим выражением:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2} \quad (11)$$

В случае слабого трения, когда постоянная затухания  $\gamma$  мала по сравнению с величиной  $\omega_0$ , характеризующей собственную частоту в отсутствие трения, частота  $\omega_1$  (11) периодического сомножителя очень близка к  $\omega_0$ :

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \gamma^2 / 2\omega_0. \quad (12)$$

Как видно из (12), относительное отклонение  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  частоты затухающих колебаний  $\omega_1$  от собственной частоты осциллятора  $\omega_0$  пропорционально квадрату малого параметра  $\gamma/\omega_0$ . Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости при затухающих

колебаниях показаны на рис. 2 для случая возбуждения собственных колебаний начальным отклонением ротора из положения равновесия при нулевой начальной скорости.

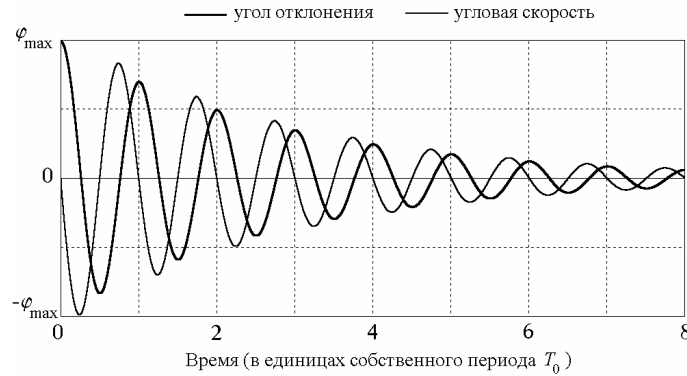


Рис. 2. Графики затухающих колебаний осциллятора, происходящих после начального возбуждения отклонением из положения равновесия.

В условиях слабого и умеренного трения зависящий от времени множитель  $A_0 \exp(-\gamma t)$  можно рассматривать как постепенно уменьшающуюся амплитуду затухающих колебаний. Спустя промежуток времени  $\tau = 1/\gamma$  эта амплитуда приблизительно в  $e = 2.72$  раз меньше своего начального значения. Время  $\tau$  называется *временем затухания* или *временем жизни* колебаний. Хотя формально колебания продолжаются бесконечно долго, характерное время  $\tau$  условно можно рассматривать как длительность процесса затухания колебаний: за конечное число таких интервалов амплитуда становится меньше любого сколь угодно малого значения.

При малом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$ , или  $\tau \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$  (условие слабого затухания), осциллятор совершает большое число  $N$  циклов собственных колебаний в течение времени жизни  $\tau$ .  $N = \tau/T_0 \gg 1$ . Последовательные максимальные отклонения из положения равновесия убывают в геометрической прогрессии. В самом деле, пусть  $\varphi_n$  есть максимальное отклонение ротора при  $n$ -м колебании. Тогда

$$\varphi_{n+1} / \varphi_n \approx \exp(-\gamma T_0) \approx 1 - \gamma T_0. \quad (13)$$

Таким образом, отношение последовательных членов (знаменатель) этой бесконечно убывающей геометрической прогрессии меньше единицы на величину  $\gamma T_0 = T_0 \ll 1$ . Для характеристики быстроты затухания колебаний используют, наряду с размерной постоянной затухания  $\gamma$ , также безразмерный *логарифмический декремент затухания*, определяемый как натуральный логарифм отношения последовательных максимальных отклонений в одну сторону. Обратная логарифмическому декременту величина — это число циклов колебаний, совершаемых осциллятором за время затухания  $\tau$ . Другая эквивалентная логарифмическому декременту безразмерная величина, используемая для характеристики быстроты затухания колебаний, это *добротность*  $Q$ , определяемая соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi \frac{\tau}{T_0}. \quad (14)$$

Число циклов, на протяжении которых размах колебаний осциллятора уменьшается в  $e = 2.72$  раза, равно деленному на  $\pi = 3.14$  значению его добротности. Число колебаний  $N_{1/2}$ , на протяжении которых амплитуда уменьшается вдвое, выражается через добротность следующим соотношением:  $N_{1/2} = (\ln 2/\pi)Q = 0.22 Q = Q/4.53$ .

Таким образом, в принятой модели осциллятор полностью характеризуется единственным физическим параметром  $\gamma/\omega_0$  — безразмерным отношением коэффициента затухания к собственной частоте, или, как это сделано в программе, более распространенной эквивалентной характеристикой — добротностью  $Q = \omega_0/2\gamma$ .



Моделирующая программа позволяет легко проверить предсказанную выше теоретическую закономерность убывания амплитуды колебаний. Чтобы на опыте убедиться в том, что последовательность максимальных отклонений образует геометрическую прогрессию, можно для простоты ввести такое значение добротности, при котором амплитуда убывает вдвое за целое число циклов, скажем, за два ( $Q = 9.06$ ) или четыре ( $Q = 18.1$ ) цикла. Подчеркнем, что при моделировании обсуждаемое здесь аналитическое решение не используется, а выполняется численное интегрирование уравнения движения.

Когда  $\gamma \geq \omega_0$  (условие сильного затухания), осциллятор после начального возбуждения возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. В этом движении ротор либо асимптотически приближается к положению равновесия с одной стороны, либо только один раз пересекает среднее положение и затем приближается к нему с другой стороны. Последний случай возможен, если при возбуждении ротор получает достаточно большую начальную скорость в направлении положения равновесия.

Если  $\gamma = \omega_0$ , затухание осциллятора называют *критическим*. В этом случае общее решение дифференциального уравнения колебаний принимает следующий вид:

$$\varphi(t) = (C_1 t + C_2) \exp(-\gamma t), \quad (15)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — константы, значения которых определяются из начальных условий. Например, если находящийся в положении равновесия ротор ( $\varphi(0) = 0$ ) в результате толчка получает начальную скорость  $d\varphi/dt(0) = \Omega$ , то  $C_1 = \Omega$ ,  $C_2 = 0$ , и дальнейшее движение ротора описывается функцией

$$\varphi(t) = \Omega t \exp(-\gamma t). \quad (16)$$

Графики зависимости от времени угла отклонения и угловой скорости для осциллятора с критическим затуханием, движение которого возбуждается начальным толчком из положения равновесия, показаны на рис. 3. Критическому затуханию, т.е. случаю  $\gamma = \omega_0$ , соответствует добротность  $Q = 0.5$ .

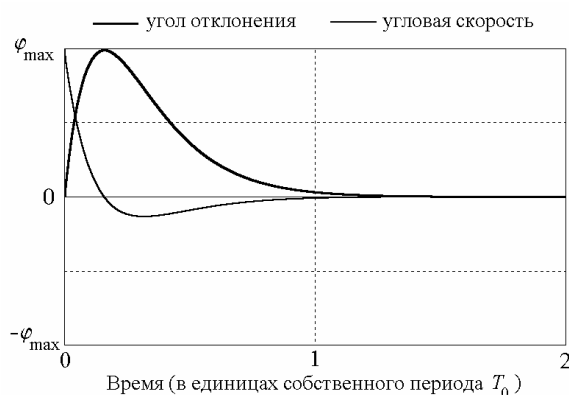


Рис. 3. Графики угла отклонения и угловой скорости при критическом затухании.

Система с затуханием, близким к критическому, после начального возбуждения возвращается в состояние покоя в положении равновесия в общем случае быстрее, чем при других значениях постоянной затухания  $\gamma$  (при данном значении  $\omega_0$ ). В измерительных приборах (таких как гальванометры с подвижной катушкой) затухание вводится преднамеренно, чтобы преодолеть трудности считывания показаний при осциллирующей стрелке. В приборе с критическим затуханием подвижная система приходит в равновесие и успокаивается, не совершая колебаний. При недостаточном демпфировании прибора стрелка совершает колебания перед остановкой. В случае передемпфированного прибора (при сверхкритическом затухании) стрелка не совершает колебаний, но для ее прихода в положение равновесия, вообще говоря, требуется большее время по сравнению со случаем критического демпфирования.

Другой пример преднамеренного введения затухания, близкого к критическому — применение гидравлических амортизаторов в упругой подвеске кузова автомобиля. При неисправных амортизаторах после каждого бугорка или ямки на дороге кузов автомобиля совершает колебания, неприятные для пассажиров и опасные с точки зрения надежности сцепления колес с дорогой.

## Фазовая диаграмма линейного осциллятора

Механическое состояние торсионного осциллятора определяется двумя динамическими переменными: *обобщенной координатой* (углом отклонения)  $\varphi$  и *обобщенной скоростью* (угловой скоростью)  $d\varphi/dt$ , или, что эквивалентно, углом отклонения  $\varphi$  и угловым моментом (моментом импульса)  $Jd\varphi/dt$ .

Механическое состояние динамической системы в любой момент времени можно наглядно изобразить с помощью точки (*изображающей точки*) в фазовом пространстве. Для системы с одной степенью свободы, положение которой определяется единственной координатой (в случае торсионного осциллятора это угол отклонения), фазовое пространство динамических переменных двумерно, т.е. представляет собой плоскость. На такой *фазовой плоскости* по оси абсцисс отложена обобщенная координата (угол отклонения)  $\varphi$ , а по оси ординат – угловая скорость  $d\varphi/dt$ . Очень наглядное графическое представление всему процессу эволюции механического состояния системы дает *фазовая диаграмма*, т.е. линия, которую изображающая точка вычерчивает на фазовой плоскости. Фазовая диаграмма для торсионного осциллятора – это график зависимости угловой скорости  $d\varphi/dt$  (или момента импульса  $Jd\varphi/dt$ ) от угла отклонения  $\varphi$ .

Если система совершает *периодическое движение*, изображающая точка на фазовой плоскости описывает *замкнутую кривую*, двигаясь по ней в направлении по часовой стрелке. Фазовая траектория периодического движения замкнута, потому что система возвращается в исходное механическое состояние после каждого полного цикла колебаний.

На рис. 4 выбрано такое взаимное расположение фазовой плоскости и графиков зависимости угла отклонения и угловой скорости от времени, чтобы было удобно в каждый момент времени сопоставлять движущуюся по фазовой плоскости изображающую точку с графиками динамических переменных (угла отклонения и угловой скорости). Для этого направления соответствующих осей и масштабы по ним на фазовой диаграмме и на графиках выбраны одинаковыми, а ось времени на графике угла отклонения направлена вниз.

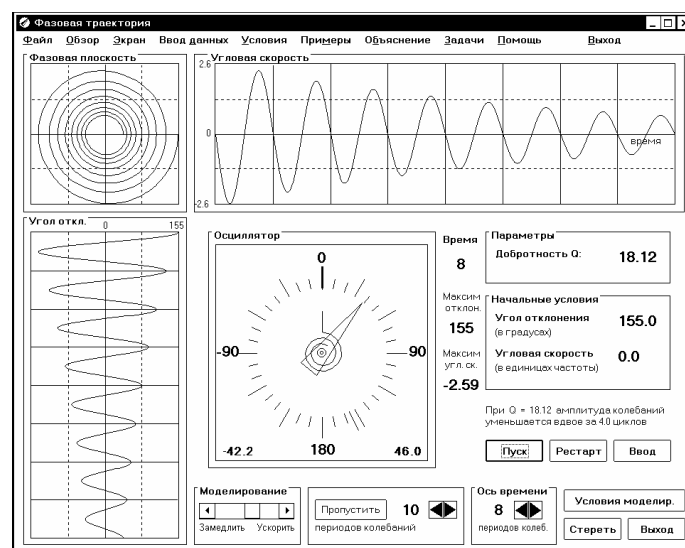


Рис. 4. Взаимное расположение фазовой плоскости и графиков временной зависимости угла отклонения и угловой скорости на экране.

Совокупность фазовых траекторий, соответствующих разным способам возбуждения (разным начальным условиям) при неизменных параметрах системы образует ее *фазовый портрет*. Через каждую точку фазовой плоскости проходит, вообще говоря, только одна фазовая траектория: если эту точку выбрать в качестве начального состояния системы, дальнейшее движение системы будет определено однозначно в соответствии с единственностью решения задачи Коши для дифференциального уравнения системы. Это движение и будет происходить вдоль фазовой траектории, проходящей через данную точку фазовой плоскости. Другими словами, фазовые траектории системы не пересекаются. Исключение составляют лишь отдельные, изо-

лированные точки фазовой плоскости. Такие точки, через которые проходит более одной фазовой траектории или не проходит ни одной траектории, называются *особыми*. Примеры особых точек будут рассмотрены ниже. Фазовый портрет (вместе с совокупностью особых точек) дает очень наглядное графическое представление о возможных движениях изучаемой динамической системы.

Фазовая траектория гармонических колебаний (например, собственных колебаний линейного осциллятора в отсутствие трения) представляет собой эллипс (или окружность при соответствующем выборе масштаба). Точки, где фазовая траектория пересекает ось абсцисс (в этих точках поворота скорость изменяет знак), соответствуют максимальным отклонениям ротора из положения равновесия. Фазовый портрет консервативного линейного осциллятора образован набором геометрически подобных эллипсов с общим центром в начале координат фазовой плоскости. Этот центр изображает состояние покоя осциллятора в положении равновесия. Так как через начало координат не проходит ни одна из фазовых траекторий (все траектории окружают эту точку), такая точка фазовой плоскости называется особой точкой типа *центр*.

Как уже отмечалось, период гармонических колебаний целиком определяется параметрами физической системы, а именно значениями жесткости пружины  $D$  и моментом инерции ротора  $J$ . В отличие от амплитуды и начальной фазы, период не зависит от начальных условий, т.е. от способа возбуждения колебаний. Это свойство линейного осциллятора называется *изохронностью*. Благодаря свойству изохронности изображающие точки обходят эллипсы разных размеров на фазовом портрете осциллятора (соответствующие разным амплитудам колебаний осциллятора с данными параметрами) в течение одного и того же времени  $T_0$ .

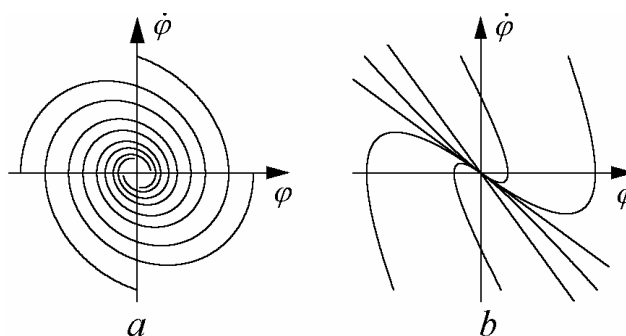


Рис. 5. Фазовый портрет затухающего линейного осциллятора (a) и системы со сверхкритическим затуханием ( $\gamma > \omega_0$ ) (b).

В присутствии сравнительно слабого вязкого трения ( $\gamma < \omega_0$ ) максимальные отклонения, как и максимальные значения угловой скорости, постепенно уменьшаются с каждым последующим циклом колебаний. Поэтому фазовая траектория собственных колебаний благодаря трению трансформируется из замкнутой кривой (эллипса или окружности) для консервативного осциллятора в постепенно скручивающуюся спираль, сжимающиеся витки которой наматываются вокруг фокальной точки, расположенной в начале координат фазовой плоскости. В этом случае начало координат из особой точки типа центр превращается в особую точку типа *фокус*. Для семейства фазовых траекторий фокус представляет собой *аттрактор* (от англ. *attract* — притягивать): все фазовые траектории, независимо от того, где они начинаются, асимптотически приближаются к фокусу, совершая вокруг него бесконечное число оборотов по все более сжимающимся виткам (левая часть рис. 5).

В случае сравнительно сильного вязкого трения ( $\gamma \geq \omega_0$ ) аттрактор фазовых траекторий из фокуса превращается в особую точку типа *узел*: все фазовые траектории неколебательных движений приближаются к этому узлу без наматывания, не совершив и одного оборота. Фазовый портрет передемпфированной системы показан в правой части рис. 5. Все фазовые траектории асимптотически приближаются к началу координат, где у них общая касательная.

Таким образом, на фазовом портрете линейного осциллятора имеется только одна особая точка: начало координат фазовой плоскости, где обе динамические переменные  $\varphi$  и  $d\varphi/dt$  равны нулю. Как уже отмечалось, этой точке соответствует состояние покоя в положении рав-

новесия. При  $\gamma = 0$  это точка типа центр, через которую не проходит ни одна траектория. При  $\gamma < \omega_0$  это фокус, а при  $\gamma \geq \omega_0$  это узел фазовых траекторий.

Особые точки типа фокус и узел дают примеры аттракторов, к которым притягиваются все фазовые траектории. При изучении движения жесткого маятника в поле тяжести мы встретимся еще с одним типом особых точек, возможных в консервативных нелинейных системах, а именно, с особой точкой типа *седло*, через которую проходят две фазовые траектории.

## Превращения энергии при колебаниях

Полная энергия  $E$  торсионного пружинного осциллятора представляет собой сумму потенциальной энергии  $E_{\text{pot}}$  упруго деформированной пружины и кинетической энергии  $E_{\text{kin}}$  вращающегося маховика:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} D\varphi^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2. \quad (17)$$

Собственные колебания в отсутствие трения характеризуются обратимыми превращениями энергии одного из этих видов полностью в другой и обратно. В точках максимального отклонения от положения равновесия кинетическая энергия равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой потенциальную энергию деформированной пружины. Спустя четверть периода колебаний ротор проходит через положение равновесия, где потенциальная энергия пружины равна нулю, и полная энергия осциллятора представляет собой кинетическую энергию вращающегося маховика. В течение следующей четверти периода происходит обратное превращение энергии: кинетическая энергия превращается в потенциальную энергию упругой деформации. Таким образом, два вида энергии совершают колебания в противофазе друг другом на частоте  $2\omega_0$ , т.е. на удвоенной частоте  $\omega_0$  колебаний угла отклонения осциллятора.

Описанный выше полный обмен между двумя видами энергии характерен для консервативной системы, в которой энергетические превращения обратимы. Сумма кинетической и потенциальной энергий, т.е. полная энергия  $E$  осциллятора, имеет одно и то же значение в любой момент времени. Это значение совпадает с максимальными значениями каждого из двух видов энергии. Полная энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды его колебаний. Средние за период колебаний значения кинетической и потенциальной энергии осциллятора, совершающего собственные колебания, равны друг другу и составляют половину неизменного значения полной энергии.

При наличии трения взаимные превращения потенциальной и кинетической энергий становятся частично необратимыми из-за рассеяния (диссипации) механической энергии. Графики энергетических превращений при затухающих колебаниях показаны на рис. 6. Отметим, что рассеяние энергии происходит неравномерно на протяжении цикла колебаний. Скорость диссипации  $-dE/dt$  максимальна при движении ротора в окрестности положения равновесия, а именно в те моменты времени, когда максимальна величина угловой скорости маховика. В самом деле, скорость рассеяния механической энергии из-за вязкого трения  $-dE/dt = -N_{\text{тр}} d\varphi/dt$  (где  $N_{\text{тр}} = -2\gamma d\varphi/dt$ ), пропорциональна квадрату угловой скорости и тем самым мгновенному значению кинетической энергии маховика. В точках поворота, когда маховик изменяет направление вращения и его угловая скорость обращается в нуль, рассеяния энергии не происходит. Утверждение об экспоненциальном характере убывания энергии затухающего осциллятора  $E = E_0 \exp(-2\gamma t)$ , которое часто встречается в учебниках, на самом деле справедливо не для мгновенного, а только для усредненного по периоду колебаний значения полной энергии осциллятора. Время затухания средней энергии осциллятора (время, в течение которого среднее за период значение полной энергии убывает в  $e = 2.72$  раза) равно  $\tau/2$ , т.е. вдвое меньше времени затухания амплитуды колебаний.

Отмеченную неравномерность рассеяния полной энергии на протяжении цикла колебаний легко проследить по графикам на рис. 6 (представляющему собой копию экрана при выборе в программе окна «Превращения энергии»), где вместе с графиками потенциальной, кинетической и полной энергий показаны также (в том же временном масштабе) графики угла отклонения и угловой скорости (а также потенциальная яма осциллятора и фазовая траектория).

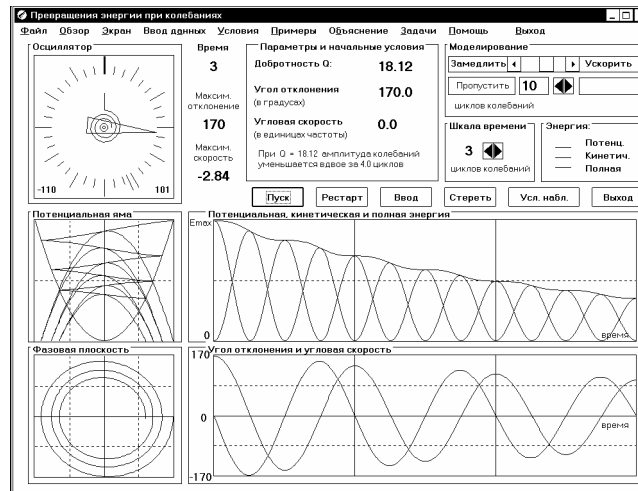


Рис. 6. Превращения энергии при затухающих колебаниях.

## Электромагнитный аналог механического осциллятора

Колебания заряда  $q$  на пластинах конденсатора в электрическом контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора  $C$ , катушки индуктивности  $L$  и резистора  $R$  (см. рис. 1), описываются таким же дифференциальным уравнением, что и колебания угла отклонения  $\varphi$  механического торсионного осциллятора. В самом деле, алгебраическая сумма напряжений  $U_C$ ,  $U_L$  и  $U_R$  на отдельных элементах такой замкнутой последовательной электрической цепи квазистационарного тока (т.е. цепи, во всех элементах которой ток в данный момент одинаков) должна быть равна нулю для любого момента времени:  $U_C + U_L + U_R = 0$ . Подставляя сюда  $U_C = q/C$ ,  $U_L = Ldl/dt$  и  $U_R = IR = Rdq/dt$ , получаем дифференциальное уравнение второго порядка для заряда на пластинах конденсатора  $q(t)$ :

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0. \quad (18)$$

Вводя обозначения  $\omega_0^2 = 1/LC$ ,  $2\gamma = R/L$ , перепишем уравнение (18) в виде

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (19)$$

что совпадает с уравнением (9) для угла отклонения  $\varphi$  ротора механического осциллятора. Таким образом, собственные электромагнитные колебания в последовательном  $LCR$ -контуре и колебания механического пружинного осциллятора, несмотря на совершенно разную физическую природу происходящих процессов, подчиняются одинаковым закономерностям. В колебательном контуре катушка индуктивности  $L$  служит аналогом инертного элемента (маховика) механической системы, а конденсатор  $C$  — аналогом упругого элемента (спиральной пружины). Роль вязкого трения играет сопротивление резистора  $R$  электрическому току.

Аналогия между механической и электромагнитной системами распространяется и на происходящие в них энергетические превращения. Энергия электрического поля в конденсаторе колебательного контура полностью аналогична потенциальной энергии деформированной пружины. Энергия магнитного поля катушки при протекании в ней электрического тока полностью аналогична кинетической энергии вращающегося маховика. При электромагнитных колебаниях в контуре происходят взаимные превращения энергии электрического поля в конденсаторе и энергии магнитного поля в катушке. В отсутствие сопротивления (при  $R = 0$ ) полная энергия остается неизменной. При наличии электрического сопротивления превращения энергии из одного вида в другой частично необратимы: рассеяние энергии в резисторе (выделение джоулевой теплоты) приводит к экспоненциальному затуханию электромагнитных колебаний в контуре подобно тому, как вязкое трение в механическом осцилляторе приводит к затуханию собственных механических колебаний.

## Колебания и перевороты жесткого маятника

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в XVI веке и вплоть до наших дней, простой маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля, и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но главным образом потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. Теория солитонов (уединенных волн в нелинейной среде с дисперсией), эффекты Джозефсона в слабой сверхпроводимости, сверхизлучение в квантовой оптике, процессы генерации лазеров – вот лишь некоторые наиболее известные примеры.

Одна из программ пакета «Физика колебаний» моделирует движение в однородном поле тяготения математического маятника в виде точечной массы, закрепленной на конце невесомого стержня, который может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Та же модель в равной мере применима и к поведению физического маятника, т.е. произвольного твердого тела (а не только точечной массы), которое может свободно поворачиваться вокруг фиксированной горизонтальной оси, так как обе системы описываются одним и тем же нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (20)$$

В отсутствие трения маятник характеризуется единственным параметром  $\omega_0$ , который имеет смысл частоты малых колебаний:  $\omega_0^2 = g/l$ , где  $g$  – ускорение свободного падения,  $l$  – длина маятника (для физического маятника – приведенная длина  $l = I/ma$ , где  $I$  – момент инерции,  $a$  – расстояние от оси до центра масс).

## Зависимость периода колебаний от амплитуды

Нелинейный характер уравнения (20) проявляется прежде всего в зависимости частоты  $\omega$  (и периода  $T = 2\pi/\omega$ ) собственных колебаний от амплитуды  $\varphi_m$ . Уравнение (20) не имеет точного решения в элементарных функциях. Приближенную формулу для зависимости периода колебаний от амплитуды можно получить, разлагая  $\sin \varphi$  в уравнении (20) в ряд по степеням  $\varphi$ . Сохраняя первые два члена разложения, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi - \frac{1}{6}\omega_0^2\varphi^3 = 0. \quad (21)$$

Можно искать приближенное решение приближенного уравнения (21) в виде суперпозиции синусоидального колебания  $\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega t$  с некоторой (пока неопределенной) частотой  $\omega$  и амплитудой  $\varphi_m$ , и его третьей гармоники  $\varepsilon \varphi_m \cos(3\omega t)$  (мы принимаем момент максимального отклонения маятника за начало отсчета времени  $t = 0$ ). Такое решение приведено во многих учебниках (см., например, Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман, *Механика*, Берклиевский курс физики, т. I, стр. 224 – 227, Москва, «Наука», 1971). Относительный вклад третьей гармоники  $\varepsilon$  оказывается равным  $\varphi_m^2/192$ , где  $\varphi_m$  – амплитуда основной гармоники, частота  $\omega$  которой получается меньшей, чем частота  $\omega_0$  предельно малых колебаний на величину, пропорциональную квадрату амплитуды  $\varphi_m$ :

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \varphi_m^2\right); \quad T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_m^2\right). \quad (22)$$

Формула (22) показывает, что при размахе колебаний  $\varphi_m$ , скажем, в  $30^\circ$  ( $0,52$  рад) относительное увеличение периода (по сравнению с периодом предельно малых колебаний) составляет  $0,017$  (т.е.  $1,7\%$ ). Относительный вклад третьей гармоники в такое несинусоидальное колебание равен  $0,14\%$ , т.е. ее амплитуда равна всего лишь  $0,043^\circ$ . В одном из заданий к лабораторной работе студенту предлагается проверить на опыте приближенную теоретическую формулу (22) для периода колебаний.

В таблице 1 приведены (для нескольких значений амплитуды колебаний) значения периода  $T$ , рассчитанные с помощью формулы (22) и измеренные в моделирующем эксперименте. Сравнивая второй и третий столбцы таблицы, можно заключить, что при размахе колебаний в  $45^0$  приближенная формула (22) дает значение периода с ошибкой всего 0,13%. Однако при размахе колебаний в  $90^0$  ошибка составляет уже 2,24%. Погрешность формулы (22) не превышает 1% для амплитуд вплоть до  $70^0$ .

Таблица 1

Амплитуда	$T/T_0$	
	Расчет по формуле (22)	Эксперимент
$30^0$	1,0171	1,0175
$45^0$	1,0386	1,0400
$60^0$	1,0685	1,0732
$90^0$	1,1539	1,1803
$120^0$	1,2742	1,3730
$135^0$	1,3470	1,5279
$150^0$	1,4284	1,7622

Подобную проверку приближенной формулы (22) для зависимости периода колебаний маятника от амплитуды можно выполнять, разумеется, и в экспериментах с настоящим маятником, не прибегая к моделированию. Для получения хороших результатов, особенно при сравнительно больших амплитудах, используемый маятник должен быть весьма прецизионным, а потому с неизбежностью очень дорогим. Но главное достоинство моделирующего эксперимента заключается отнюдь не в возможности обойтись без дорогостоящего прибора. Даже самый совершенный прибор не в состоянии обеспечить сколько-нибудь надежных измерений при амплитудах, приближающихся к  $180^0$  – ничтожное трение совершенно исказит картину колебаний. Но именно такие движения интересны, когда аналогия с маятником используется, скажем, при изучении солитонов. Компьютерный эксперимент и в таких случаях может дать исчерпывающие ответы на интересующие нас вопросы.

При больших углах отклонения маятника возвращающий момент силы тяжести растет не так быстро, как у гармонического осциллятора. Поэтому говорят, что маятник представляет собой осциллятор с «мягкой» возвращающей силой. Крутизна берегов потенциальной ямы маятника уменьшается по мере приближения к вершинам окружающих ее потенциальных барьеров, и поэтому с увеличением амплитуды маятник все больше времени проводит в окрестностях точек максимального отклонения (точек поворота), где происходит обращение направления его движения. Именно с этим обстоятельством связан рост периода с увеличением амплитуды. Чем больше размах колебаний, тем сильнее графики зависимости от времени отличаются от синусоид: на графике угла отклонения вершины уплощаются, в то время как на графике угловой скорости вершины становятся острее.

Отмеченные особенности колебаний маятника с большими амплитудами хорошо видны на рис. 7, где показаны графики колебаний с амплитудой  $170^0$ , полученные в моделирующем эксперименте. Так как маятник большую часть периода колебаний проводит в медленном движении вблизи точек наибольшего отклонения, где его потенциальная энергия близка к своему максимальному значению, а кинетическая очень мала, среднее за период значение потенциальной энергии значительно больше среднего значения кинетической, в противоположность малым колебаниям, при которых средние за период значения двух видов энергии одинаковы.

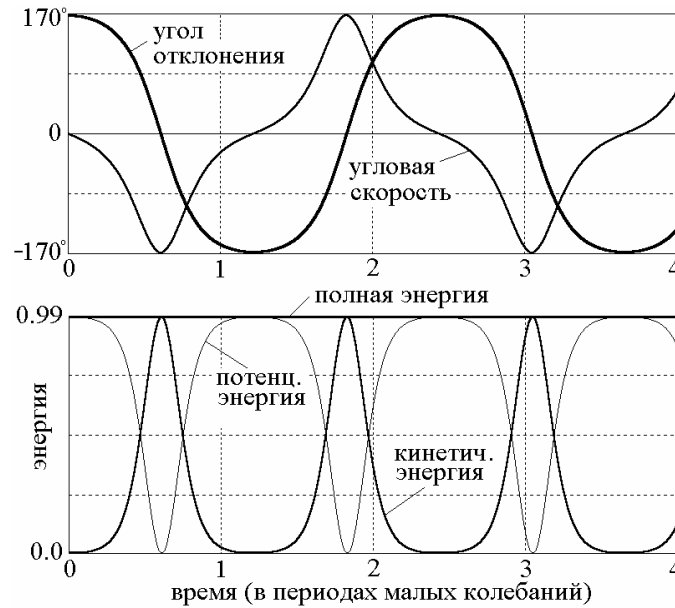


Рис. 7. Графики колебаний с большой амплитудой ( $\varphi_m = 170^\circ$ ) и происходящих при этом превращений энергии в отсутствие трения, полученные при моделировании.

### Лимитационное движение маятника

Особый интерес представляет движение маятника с полной энергией, равной потенциальной энергии в перевернутом положении. Этот вид движения называют *лимитационным*, так как он разделяет два типа возможных движений: колебания и перевороты (вращения) маятника. В этом частном случае уравнение (20) имеет аналитическое решение в элементарных функциях. Его можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии. При  $E = 2mgl$  из закона сохранения энергии вытекает следующая зависимость угловой скорости от угла отклонения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2). \quad (23)$$

Как видно из (23), по мере приближения маятника к перевернутому положению  $\varphi = \pi$  или  $\varphi = -\pi$  угловая скорость неограниченно уменьшается, обращаясь в нуль в самой точке  $\varphi = \pm\pi$ . Здесь маятник покоится в положении неустойчивого равновесия. Сколь угодно малое начальное отклонение маятника из этого положения в ту или другую сторону приведет к колебаниям с амплитудой почти  $180^\circ$ , в то время как сколь угодно малый начальный толчок вызовет перевороты маятника, т.е. приведет к вращению в одном направлении. При таких колебаниях и при таких переворотах маятник большую часть времени медленно движется в окрестности перевернутого положения.

Из уравнения (23) легко найти зависимость угла отклонения от времени для лимитационного движения. Выбрав знак «+» и интегрируя (23) при начальном условии  $\varphi(0) = 0$ , получаем:

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}). \quad (24)$$

Это решение описывает движение против часовой стрелки, начинающееся при  $t = -\infty$  из положения  $\varphi = -\pi$  с нулевой начальной скоростью. При  $t = 0$  маятник проходит через нижнюю точку своей круговой траектории и затем продолжает движение дальше, асимптотически приближаясь к перевернутому положению  $\varphi = +\pi$ . График этого движения показан на рис. 8.



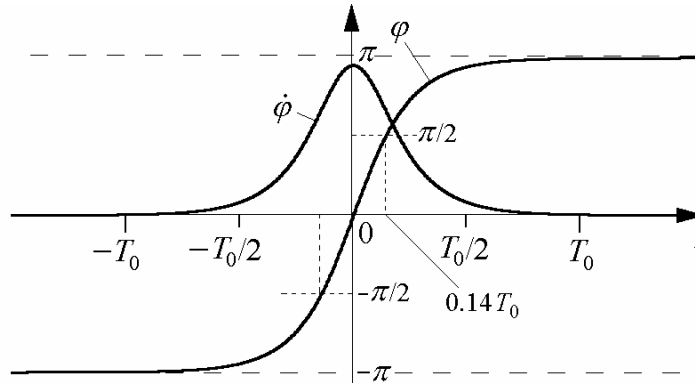


Рис. 8. Зависимость угла отклонения и угловой скорости от времени в случае лимитационного движения маятника. Момент  $t = 0$  соответствует прохождению через положение равновесия.

Второе решение, соответствующее выбору знака « $\leftarrow$ » в уравнении (23), т.е. движению по часовой стрелке, получается из (24) обращением знака времени. Решения при других начальных условиях получаются из (24) сдвигом начала отсчета времени, т.е. заменой  $t$  на  $t - t_0$ . Зависимость угловой скорости от времени при лимитационном движении можно получить, выражая  $\cos(\varphi/2)$  из (24) и подставляя в (23):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}. \quad (25)$$

График этой функции (см. рис. 8) имеет вид одиночного импульса. Начало отсчета времени  $t = 0$  в (25) выбрано в момент, когда маятник проходит через нижнее положение равновесия с угловой скоростью  $2\omega_0$ . Для моментов времени  $t = \pm T_0/2$  по обе стороны от пика значение угловой скорости, как следует из (25), составляет лишь  $0.17\omega_0$ . Поэтому приближенно можно принять период малых колебаний  $T_0$  за длительность импульса на графике скорости лимитационного движения. Другими словами,  $T_0$  дает оценку времени, в течение которого маятник проходит почти весь свой круговой путь от одной окрестности перевернутого положения через нижнюю точку до другой его стороны.

Как видно из (25), крылья контура  $d\varphi/dt$  спадают экспоненциально при  $t = \pm\infty$ . В самом деле, при больших  $t$  можно пренебречь вторым слагаемым  $\exp(-\omega_0 t)$  в знаменателе (25), что дает  $d\varphi/dt = \pm 4\omega_0 \exp(-\omega_0 t)$ . Таким образом, когда полная энергия маятника в точности равна высоте потенциального барьера, угловая скорость маятника экспоненциально уменьшается по мере того, как он асимптотически (бесконечно долго) приближается к вершине барьера, т.е. к неустойчивому положению равновесия. Это движение не периодически.

Используя выражение (24) для зависимости угла отклонения от времени, можно найти интервал времени  $\tau$ , в течение которого маятник движется от одного горизонтального положения до другого через нижнюю точку:  $\tau = 0,28T_0$ . В течение этого промежутка времени кинетическая энергия маятника больше потенциальной. Поэтому время  $\tau$  равно полуширине (ширине на половине высоты) одиночного импульса кинетической энергии для лимитационного движения маятника.

## Зависимость периода от энергии

Когда полная энергия отличается от критического значения  $E_m = 2mgl$ , движение маятника периодически (колебания при  $E < E_m$  и вращение при  $E > E_m$ ). Период  $T$  такого движения возрастает неограниченно, если энергия приближается к  $E_m$  как со стороны больших, так и меньших значений. Рис. 9 показывает зависимость периода от полной энергии  $T(E)$ , полученную с помощью моделирующего эксперимента.

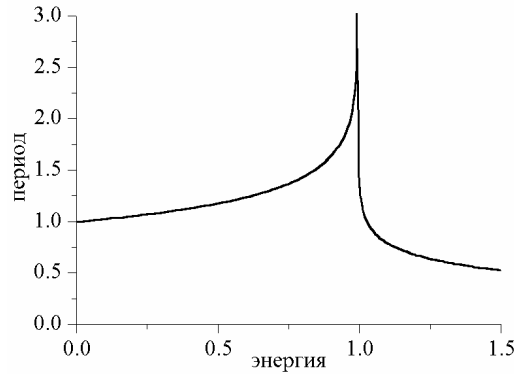


Рис. 9. Период как функция полной энергии  $E$  (отношения  $E/E_m$ ) для колебаний и переворотов в отсутствие трения.

Начальный участок графика показывает почти линейный рост периода с энергией, что соответствует приближенной формуле (22), так как при малых колебаниях полная энергия маятника приблизительно пропорциональна квадрату амплитуды:  $E \sim \varphi_m^2$ . Такую закономерность, справедливую для колебаний со сравнительно небольшими амплитудами, разумеется можно проверить, экспериментируя с настоящим маятником и не обращаясь к моделированию. Но совсем иное дело, если нас интересуют колебания с амплитудами, приближающимися к  $180^\circ$ , т.е. движение, близкое к лимитационному. При  $E \sim E_m = 2mgl$  тонкие детали зависимости периода от амплитуды в натурном эксперименте установить невозможно. Напротив, моделирование позволяет выполнить точные измерения периода и в то же время увидеть возможный путь для теоретического расчета. В одном из заданий к этой лабораторной работе студенту предлагается исследовать зависимость периода колебаний от амплитуды при  $\varphi_m \rightarrow \pi$ .

Выполняя моделирование колебаний маятника с амплитудами  $\varphi_m$ , равными  $179,900^\circ$ ,  $179,990^\circ$  и  $179,999^\circ$ , при сравнении графиков скорости можно увидеть, что длительность импульсов в этих случаях практически одинакова, но интервалы между пиками (т.е. периоды колебаний) возрастают по мере приближения амплитуды к  $180^\circ$ . Экспериментальные значения периодов таких необычных колебаний составляют соответственно  $5,5T_0$ ,  $6,8T_0$  и  $8,3T_0$ . Из графиков хорошо видно, что все это различие в периодах накапливается при очень медленном движении маятника в непосредственной близости перевернутого положения, в то время как большая часть кругового пути через нижнее положение равновесия описывается практически неотличимыми графиками, совпадающими с графиком лимитационного движения. Это значит, что весь путь маятника от нижнего положения равновесия до точки наибольшего отклонения можно мысленно разделить на две характерные части: одна часть (одинаковая для всех трех рассматриваемых случаев) простирается от нижней точки  $\varphi = 0$  до некоторого произвольно выбранного угла  $\varphi_c$  (например,  $\varphi_c = 175^\circ$ ), а вторая часть – от  $\varphi_c$  до максимального отклонения  $\varphi_m$  (разного в трех случаях). С хорошей точностью время движения маятника от  $\varphi = 0$  до угла  $\varphi_c$  (обозначим это время через  $t_1$ ) можно найти, считая, что рассматриваемое движение совпадает с лимитационным движением. Для этого воспользуемся известным аналитическим решением (24), подставляя в него  $\varphi = \varphi_c$  при  $t = t_1$ :

$$\pi - \varphi_c = 4 \arctan(e^{-\omega_0 t_1}). \quad (26)$$

Так как  $\varphi_c$  выбран весьма близким к  $\pi$  (скажем,  $\varphi_c = 175^\circ$ ), угол  $\pi - \varphi_c$  (обозначим его  $\alpha_c$ ) можно считать малым, так что тангенс  $\alpha_c/4$  практически совпадает с аргументом:  $\operatorname{tg}(\alpha_c/4) \approx \alpha_c/4$ . Таким образом, из (26) получаем:

$$t_1 \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{4}{\alpha_c}. \quad (27)$$

Время  $t_1$  зависит, конечно, от  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ , т.е. от положения точки, которую мы выбрали для деления всего пути на две части. Дальнейшее движение маятника от  $\varphi_c$  до максимального отклонения  $\varphi_m$ , происходящее в малой окрестности перевернутого положения, можно рассмат-

ривать с помощью линеаризованного уравнения движения. Для этого в точном уравнении (20) перейдем к новой переменной  $\alpha = \pi - \varphi$ . Другими словами, мгновенное положение маятника будем отсчитывать не от нижнего, а от верхнего положения равновесия. Тогда в (20) можно положить  $\sin\alpha \approx \alpha$ , и уравнение для  $\alpha$  принимает вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \omega_0^2\alpha = 0. \quad (28)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид суперпозиции двух экспонент:

$$\alpha(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}. \quad (29)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий. Здесь удобно, пользуясь обратимостью движения маятника, выбрать начало отсчета времени в точке поворота  $\varphi_m$ , т.е. вместо движения вверх от  $\varphi_c$  до  $\varphi_m$ , происходящего в течение искомого времени  $t_2$ , рассмотреть обратное движение от точки поворота  $\varphi_m$  до  $\varphi_c$ . Ясно, что оно потребует точно такого же времени  $t_2$ . Тогда в начальный момент  $d\alpha/dt = 0$ , откуда  $C_1 = C_2$ . Из второго начального условия  $\alpha(0) = \alpha_m = \pi - \varphi_m$  находим  $C_1 = \alpha_m/2$ . Далее для нахождения  $t_2$  подставляем в (29)  $\alpha(t_2) = \alpha_c$ , и учитываем, что  $\exp(-\omega_0 t_2) \ll \exp(\omega_0 t_2)$ . Последнее неравенство справедливо при условии, что выбранный нами угол  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$  удовлетворяет неравенству  $\alpha_c \gg \alpha_m$  (время движения  $t_2$  на втором участке велико по сравнению с периодом малых колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ). Окончательно для времени движения  $t_2$  на втором участке получаем:

$$t_2 \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{2\alpha_c}{\alpha_m}. \quad (30)$$

Полное время движения  $t_1 + t_2$  от нижнего положения до точки поворота  $\varphi_m$  находим, складывая правые части (27) и (30). При сложении из выражения для  $t_1 + t_2$  произвольно выбранный нами угол  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$  выпадает. Это значит, что результат не зависит от выбора точки деления  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ , важно лишь, чтобы для  $\alpha_c$  выполнялись неравенства  $\alpha_m \ll \alpha_c \ll 1$ . Так как время  $t_1 + t_2$  составляет четверть периода колебаний маятника с амплитудой  $\varphi_m$ , для периода колебаний с амплитудами  $\varphi_m$ , близкими к  $180^\circ$ , получаем следующую теоретическую оценку:

$$T = 4(t_1 + t_2) \approx \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{8}{\alpha_m} = \frac{6T_0}{\pi} \ln \frac{2}{\pi - \varphi_m}. \quad (31)$$

Для амплитуд  $179,900^\circ$ ,  $179,990^\circ$  и  $179,999^\circ$  расчет по формуле (31) дает значения периодов  $T = 5,37T_0$ ,  $T = 6,83T_0$  и  $T = 8,30T_0$  соответственно, хорошо согласующиеся с измеренными в моделирующем эксперименте значениями ( $T = 5,5T_0$ ,  $T = 6,8T_0$  и  $T = 8,3T_0$ ). Приближенная формула (31) тем точнее, чем ближе амплитуда  $\varphi_m$  к  $180^\circ$ . Рассмотренный пример отчетливо показывает, как компьютерное моделирование может помочь в построении количественной аналитической теории изучаемого явления.

\* \* \*

Компьютерный эксперимент выполняет также и функции контроля за усвоением приобретенных знаний и навыков: полученные при самостоятельном решении теоретических задач результаты студент проверяет на опыте, а не по готовому ответу. Такой подход усиливает эмоциональную сторону учебного процесса и стимулирует познавательный интерес, приближая работу студента по своему характеру к небольшому научному исследованию.

Практический опыт применения интерактивных моделирующих компьютерных программ в преподавании свидетельствует, что они способны значительно повысить эффективность изучения разных разделов курса физики. Подчеркнем, что успешное использование таких программ в учебном процессе возможно лишь в комплексе с тщательно подготовленными методическими материалами и специальными учебными пособиями.