

# Вынужденные колебания линейного осциллятора

## Учебное пособие

Бутиков Е. И.

**Аннотация.** В учебном пособии дано описание моделируемой физической системы и приведены теоретические сведения, необходимые студентам для подготовки к лабораторной работе «Вынужденные колебания линейного осциллятора».

Вторую часть пособия составляют контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы, а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

## Содержание

<b>1 Теоретические сведения</b>	<b>2</b>
1.1 Общие положения . . . . .	2
1.2 Модель физической системы . . . . .	3
1.3 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний . . . . .	4
1.4 Принцип суперпозиции . . . . .	5
1.5 Установившиеся вынужденные колебания . . . . .	6
1.6 Колебания в отсутствие трения . . . . .	6
1.7 Резонансные кривые . . . . .	7
1.8 Резонанс угловой скорости . . . . .	10
1.9 Энергетические превращения . . . . .	10
1.10 Поглощаемая и рассеиваемая осциллятором мощность. Лоренцевский контур . . . . .	12
1.11 Переходные процессы . . . . .	14
1.12 Условия отсутствия переходного процесса . . . . .	16
1.13 Резонансная раскачка осциллятора . . . . .	16
1.14 Классический механический аналог вынужденного излучения . . . . .	19
1.15 Переходные процессы вблизи резонанса . . . . .	21
1.16 Переходные процессы вдали от резонанса . . . . .	22
1.17 Фазовая траектория переходных процессов и сечения Пуанкаре . . . . .	24

<b>2 Контрольные вопросы и задачи</b>	<b>25</b>
2.1 Установившиеся вынужденные колебания . . . . .	25
2.2 Переходные процессы . . . . .	28
2.3 Приложение. Сводка основных формул . . . . .	31

## 1 Теоретические сведения

В данном пособии рассматривается движение линейного механического осциллятора под действием синусоидальной вынуждающей силы. Используется такая же модель торсионного осциллятора, что и при изучении собственных колебаний — уравновешенный маховик со спиральной пружиной. Рассматривается кинематический способ возбуждения колебаний, когда одна из частей системы совершает заданное периодическое движение. Изучаются установившиеся вынужденные колебания и переходные процессы установления колебаний. Выполняется разложение переходного процесса на сумму синусоидальных колебаний на частоте внешнего воздействия и затухающих колебаний на собственной частоте осциллятора.

### 1.1 Общие положения

В соответствии с принятой классификацией колебаний по способу их возбуждения, колебания называют *вынужденными*, когда осциллятор подвергается внешнему периодическому воздействию, которое приводит к появлению в дифференциальном уравнении системы дополнительного члена в виде заданной периодической функции времени. Нас будет интересовать реакция осциллятора на это периодическое внешнее воздействие.

Поведение колебательной системы под действием периодических внешних сил представляет собой один из наиболее важных вопросов в теории колебаний. Самая замечательная особенность вынужденных колебаний заключается в явлении *резонанса*, когда сравнительно слабое периодическое внешнее воздействие может вызвать чрезвычайно сильную реакцию осциллятора. Резонанс очень часто встречается в физике и находит множество различных интересных применений.

Резонанс определяется не значением внешней силы в какой-то момент, а всем видом функциональной зависимости внешнего воздействия от времени на протяжении большого интервала. В случае собственных колебаний в замкнутой системе внешнее воздействие, необходимое для выведения системы из равновесия и возбуждения колебаний, вообще не оставляет никаких следов в дифференциальном уравнении колебаний. Это воздействие лишь обеспечивает определенные начальные условия и заканчивается к некоторому моменту времени, рассматриваемому как начальный момент для дальнейших собственных колебаний. Этим начальным состоянием определяется амплитуда и фаза последующих собственных затухающих колебаний, а их частота (и быстрота затухания) определяются исключительно свойствами самого осциллятора, т. е. совершенно не зависят от характеристик возбуждающего внешнего воздействия. Напротив, вынужденные колебания, происходящие при постоянном действии периодической внешней силы,

зависят не только и не столько от начальных условий, сколько от характеристик внешнего воздействия, а именно от амплитуды и (главным образом) от частоты внешней силы.

## 1.2 Модель физической системы

Для изучения закономерностей вынужденных колебаний мы используем такой же механический осциллятор, что и при изучении собственных колебаний — уравновешенный инертный маховик (стержень с грузами) на упругой спиральной пружине, обеспечивающей ему устойчивое положение равновесия. Такое устройство напоминает балансовый механизм механических наручных часов. Но теперь второй конец пружины не закреплен неподвижно, а соединен с шатуном, который можно поворачивать в одну и в другую сторону вокруг общей с маховиком оси. Рисунок 1 дает представление о схематическом изображении осциллятора с возбуждающим шатуном на экране компьютера в моделирующей программе.

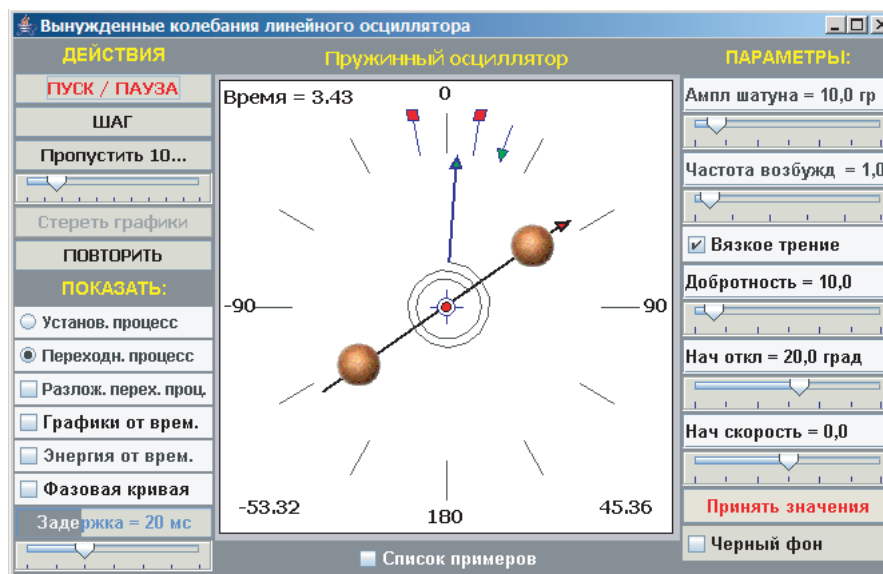


Рис. 1: Торсионный пружинный осциллятор, возбуждаемый заданным периодическим движением шатуна, к которому прикреплена спиральная пружина.

Такая механическая система идеально подходит для изучения вынужденных колебаний и явления резонанса, потому что на этом примере можно непосредственно видеть все, что происходит. При повороте шатуна положение равновесия ротора (маховика) смещается вместе с шатуном на такой же угол. Около нового положения равновесия ротор может совершать затухающие колебания на собственной частоте. При слабом и умеренном трении частота этих колебаний близка к частоте  $\omega_0$  собственных колебаний маховика в отсутствие трения. Эта частота определяется жесткостью  $D$  пружины и моментом инерции  $J$  маховика:  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ .

Если шатуну принудительно сообщить периодическое колебательное движение, то на осциллятор будет действовать периодическая внешняя сила. Такое воздействие дает пример *кинематического возбуждения* колебаний, для которого характерно заданное движение какой-либо части колебательной системы. Кинематический способ возбуждения колебаний выбран здесь из-за своей наглядности: движение возбуждающего шатуна непосредственно наблюдается на экране. Компьютерное моделирование позволяет отчетливо видеть, скажем, сдвиг фаз между возбуждающим шатуном и ротором, соотношение их амплитуд, и многое другое.

В отличие от кинематического возбуждения, при *динамическом*, т. е. прямом силовом возбуждении, задается действующая на осциллятор внешняя сила, явно зависящая от времени и не зависящая от положения и скорости осциллятора. Прямой силовой способ возбуждения менее нагляден и труднее поддается визуализации, так как мы не в состоянии наблюдать силу непосредственно, а можем судить о ней лишь косвенно по ее влиянию на механическое движение. Но это влияние в данном случае далеко не очевидно: именно оно и составляет предмет нашего исследования. К тому же динамическое возбуждение труднее реализовать в чистом виде в натурном эксперименте. Тем не менее следует иметь в виду, что в большинстве учебников рассматривается именно силовое возбуждение вынужденных колебаний. Дифференциальные уравнения для силового и кинематического способов возбуждения колебаний одинаковы, но некоторые физические различия проявляются в характере энергетических превращений: при движении возбуждающего шатуна потенциальная яма осциллятора смещается вместе с шатуном, тогда как при силовом возбуждении эта яма неподвижна. Об этих различиях подробнее будет сказано ниже.

### 1.3 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Пусть возбуждающий шатун принудительно совершает гармонические колебания около среднего положения (вертикального на рис. 1) с некоторой амплитудой  $\phi_0$  и угловой частотой  $\omega$ , так что угол его отклонения  $\phi(t)$  синусоидально зависит от времени:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Если в некоторый момент времени  $t$  маховик осциллятора отклонен от среднего положения (принятого за начало отсчета углов на шкале на рис. 1) на угол  $\varphi$ , а возбуждающий шатун в этот момент смещен на угол  $\phi$ , то со стороны пружины на маховик действует момент сил  $-D(\varphi - \phi) = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t$ . В самом деле, пружина в этот момент времени деформирована (закручена от равновесного состояния) на угол  $\varphi - \phi$ , а не на угол  $\varphi$ , как в случае свободных колебаний. Поэтому уравнение основного закона динамики для вращательного движения маховика с моментом инерции  $J$  в отсутствие трения имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi + D\phi_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Это уравнение можно рассматривать и как дифференциальное уравнение вынужденных колебаний торсионного пружинного осциллятора под действием приложенного к нему заданного

внешнего момента  $D\phi_0 \sin \omega t$ , изменяющегося синусоидально с частотой  $\omega$  и неизменной амплитудой  $D\phi_0$ . Таким образом, кинематический и силовой способы возбуждения действительно описываются одним и тем же дифференциальным уравнением.

Разделив обе части уравнения (2) на момент инерции маховика  $J$  и вводя обозначение  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$  для частоты собственных колебаний ( $\omega_0^2 = D/J$ ), переписываем уравнение в канонической форме:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t. \quad (3)$$

При наличии вязкого трения, пропорционального скорости, мы должны добавить в уравнение движения тормозящий момент силы трения, пропорциональный угловой скорости маховика  $\dot{\varphi}$ . Тогда вместо уравнения (3) будем иметь:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \omega_0^2 \phi_0 \sin \omega t. \quad (4)$$

Постоянная затухания  $\gamma$  характеризует интенсивность вязкого трения. Как и в случае собственных колебаний, вместо нее можно использовать эквивалентную безразмерную величину — добротность  $Q$ , определяемую соотношением  $Q = \omega_0/2\gamma$ . Таким образом, вынужденные колебания осциллятора описываются *неоднородным* линейным дифференциальным уравнением второго порядка, в отличие от собственных колебаний, для которых дифференциальное уравнение однородно, т. е. не содержит правой части, которая имеет вид заданной функции времени и обусловлена действием внешней силы. Положение рассматриваемой системы в любой момент времени определяется двумя угловыми координатами — углами  $\varphi$  и  $\phi$ . Но координата  $\phi$  — положение возбуждающего стержня — задана внешними условиями, она не свободна, так что в сущности второй степенью свободы система не обладает. «Свободной» координатой, т. е. неизвестной функцией времени, является только угол  $\varphi$  отклонения ротора от среднего положения. Для нахождения этой функции достаточно одного дифференциального уравнения (4). Дифференциальное уравнение, соответствующее второй координате  $\phi$ , можно использовать для нахождения момента внешней силы, необходимой для обеспечения заданного движения шатуна. Источник такой силы всегда испытывает реакцию (обратное воздействие) со стороны шатуна.

## 1.4 Принцип суперпозиции

Изучение вынужденных колебаний в *линейных* системах облегчается благодаря возможности использования *принципа суперпозиции*. В соответствии с этим принципом, при одновременном воздействии нескольких вынуждающих внешних сил вызываемые ими вынужденные колебания просто складываются. Иначе говоря, в линейных системах отсутствует взаимодействие (влияние друг на друга) колебаний, возбуждаемых несколькими одновременно действующими внешними источниками. Из принципа суперпозиции также следует, что линейный осциллятор может наряду с вынужденными колебаниями под действием внешней силы совершать одновременно и затухающие собственные колебания. Последним соответствует равное нулю слагаемое в правой части уравнения (4), которое всегда можно предполагать присутствующим там вместе

с членом, обусловленным внешней силой. Эти затухающие собственные колебания возникают всякий раз при включении внешней силы (и любом изменении ее амплитуды или фазы). Наложение затухающих собственных колебаний на вынужденные колебания постоянной амплитуды происходит в течение так называемого *переходного процесса* — процесса установления вынужденных колебаний после включения (или изменения) возбуждающей силы, пока вынужденные колебания обретают частоту внешней силы и некоторую постоянную амплитуду. Длительность этого переходного процесса в общем случае определяется временем затухания собственных колебаний, которые происходили бы в этой системе после начального возбуждения в отсутствие внешнего воздействия:  $\tau \approx 1/\gamma$ .

### 1.5 Установившиеся вынужденные колебания

В течение некоторого времени после включения синусоидальной внешней силы (на протяжении переходного процесса) осциллятор успевает «забыть» свое начальное состояние, его колебания приобретают стационарный характер, и осциллятор в конце концов совершает незатухающие синусоидальные колебания на частоте внешнего воздействия — *установившиеся* вынужденные колебания. Эти установившиеся колебания описываются *периодическим* частным решением неоднородного дифференциального уравнения (4):

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta). \quad (5)$$

Установившиеся колебания характеризуются определенными постоянными значениями амплитуды  $a$  и сдвига фаз  $\delta$  между колебаниями ротора осциллятора и возбуждающего шатуна. Величины  $a$  и  $\delta$  зависят от близости частоты внешнего воздействия  $\omega$  к собственной частоте осциллятора  $\omega_0$ . Зависимости  $a(\omega)$  и  $\delta(\omega)$  от частоты внешнего воздействия называют соответственно *амплитудно-частотной* и *фазо-частотной характеристиками* осциллятора. При относительно слабом трении (при  $\gamma \ll \omega_0$ , т. е. при  $Q \gg 1$ ) зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты имеет ярко выраженный *резонансный характер* — амплитуда резко возрастает при приближении  $\omega$  к собственной частоте  $\omega_0$ . График зависимости амплитуды установившихся колебаний от частоты  $\omega$  называют *резонансной кривой*. Чем выше добротность  $Q$  осциллятора, тем острее пик резонансной кривой, т. е. тем сильнее выражены резонансные свойства осциллятора.

### 1.6 Колебания в отсутствие трения

Когда частота вынуждающей силы  $\omega$  заметно отличается от собственной частоты  $\omega_0$ , можно пренебречь влиянием трения на амплитуду  $a$  и фазовый сдвиг  $\delta$  установившихся вынужденных колебаний. Другими словами, в таких условиях для описания поведения реальной системы с небольшим трением можно воспользоваться идеализированной моделью системы, в которой трение полностью отсутствует. (Отметим, что применимость физической модели к реальной системе зависит не только и не столько от свойств системы, сколько от характера решаемой задачи.) Таким

образом, для описания установившихся колебаний в случае, когда  $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$ , можно воспользоваться уравнением (3), которое строго применимо к линейному осциллятору без трения. Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания, можно попытаться искать в виде:

$$\varphi(t) = a \sin \omega t. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в уравнение (3), находим, что (6) дает решение уравнения (3) если амплитуда  $a(\omega)$  как функция частоты  $\omega$  имеет вид:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Если частота  $\omega$  равна нулю, выражение (7) дает  $a = \phi_0$ : маховик покоится в смещенном положении равновесия. Когда  $\omega \ll \omega_0$ , из (7) получаем  $a \approx \phi_0$ : при очень медленном движении шатуна маховик квазистатически следует за ним, оставаясь все время в положении равновесия, которое смещается поочередно вправо и влево вместе с шатуном. Таким образом, при очень низкой частоте кинематически возбуждаемые вынужденные колебания осциллятора совершаются с той же амплитудой и в той же фазе, что и колебания возбуждающего шатуна.

Выражение (7) показывает, что по мере роста частоты возбуждения  $\omega$  растет амплитуда вынужденных колебаний осциллятора, и эти колебания происходят в одинаковой фазе с колебаниями шатуна. Двигаясь в одном направлении, они оба одновременно пересекают среднюю точку и одновременно достигают своих крайних положений. Однако крайнее отклонение маховика  $a$  больше, чем крайнее отклонение  $\phi_0$  шатуна. При  $\omega \rightarrow \omega_0$  амплитуда колебаний маховика  $a$  стремится к бесконечности. Это значит, что вблизи резонанса (при  $\omega \approx \omega_0$ ) трением пренебрегать нельзя (см. ниже).

При  $\omega > \omega_0$  значение  $a$ , как видно из (7), становится отрицательным. Это означает, что при  $\omega > \omega_0$  установившиеся вынужденные колебания происходят в противофазе с внешней силой: когда шатун движется в одну сторону, маховик поворачивается в противоположную сторону, и оба одновременно достигают своих крайних положений. Для этого случая решение также можно записать в форме (5), сохраняя положительные значения  $a$  для всех частот: просто под  $a$  в (5) нужно понимать модуль правой части выражения (7), а сдвиг фаз  $\delta$  положить равным нулю при  $\omega < \omega_0$  и равным  $-\pi$  при  $\omega > \omega_0$ .

## 1.7 Резонансные кривые

Вблизи резонанса (в области частот  $\omega$ , удовлетворяющих условию  $|\omega - \omega_0| \leq \gamma$ ), необходимо учитывать трение в дифференциальном уравнении вынужденных колебаний, т. е. нужно решать уравнение (4). Установившиеся вынужденные колебания описываются его периодическим частным решением. Это решение можно искать в виде (5). Амплитуду  $a$  и фазу  $\delta$  можно найти, подставляя  $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$  в (4) и приравнивая коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  в левой и

правой частях уравнения. Менее громоздкий способ определения  $a$  и  $\delta$  основан на использовании векторных диаграмм. Приведем здесь без вывода окончательные результаты:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}, \quad \tan \delta(\omega) = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

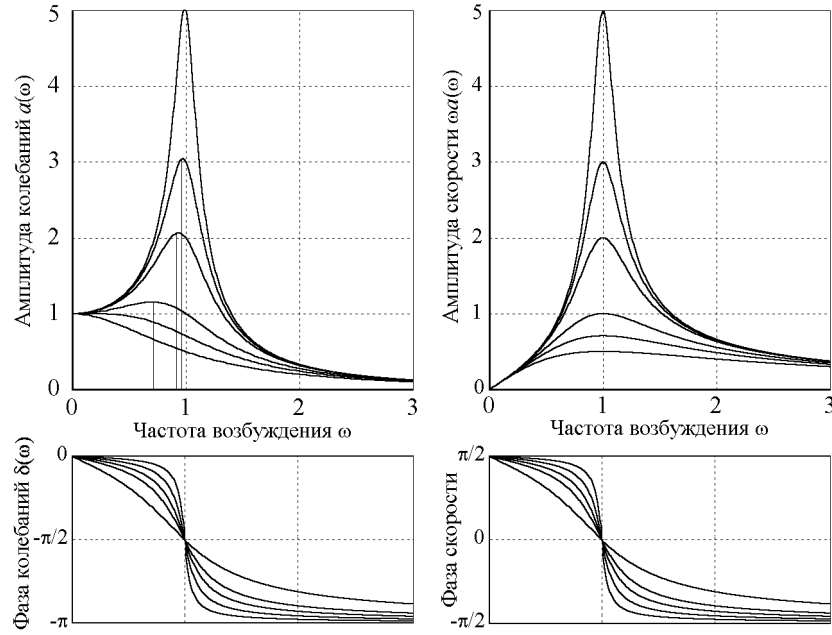


Рис. 2: Резонансные кривые линейного осциллятора.

Графики зависимости амплитуды от частоты  $a(\omega)$  (резонансные кривые, или амплитудно-частотные характеристики осциллятора) для нескольких значений добротности показаны в левой верхней части рис. 2. (По оси абсцисс отложена вынуждающая частота  $\omega$  в единицах собственной частоты  $\omega_0$ , т. е. отношение  $\omega/\omega_0$ , а по оси ординат — отношение амплитуды маховика к амплитуде вынуждающего шатуна  $a(\omega)/\phi_0$ ). Амплитуда установившихся колебаний достигает максимального значения на резонансной частоте  $\omega_{\text{res}}$ :

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (9)$$

Это выражение для  $\omega_{\text{res}}$  справедливо, если трение не слишком велико, а именно, если  $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$ . При малом трении, когда  $\gamma \ll \omega_0$  или  $Q \gg 1$ , из (9) находим приближенное выражение:

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right). \quad (10)$$



Из (10) видно, что при малом трении резонансная частота практически совпадает с собственной частотой осциллятора в отсутствие трения  $\omega_0$ : значение  $\omega_{\text{res}}$  отличается от  $\omega_0$  всего лишь на величину второго порядка по малому параметру  $\gamma/\omega_0$ . Например, при  $Q = 10$  (умеренное трение) резонансная частота отличается от частоты собственных колебаний только на 0.25%.

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний на резонансе определяется следующим выражением:

$$a_{\text{max}} = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{2\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{\omega_0 \phi_0}{2\gamma} = Q\phi_0. \quad (11)$$

Из выражения (11) видно, что резонансная амплитуда  $a_{\text{max}}$  установившихся колебаний приблизительно в  $Q$  раз больше амплитуды  $\phi_0$  вынуждающего шатуна (при условии что добротность  $Q$  не слишком мала). Иначе об этом можно сказать так: амплитуда установившихся колебаний маховика при резонансе  $a_{\text{max}}$  в  $Q$  раз больше его амплитуды при очень низкой вынуждающей частоте  $\omega$  (при медленных колебаниях шатуна). Мы видим, что резонансный отклик осциллятора при вынужденных колебаниях характеризуется той же самой величиной, что и затухание собственных колебаний — добротностью  $Q$ .

В отсутствие трения амплитуда  $a(\omega)$  установившихся вынужденных колебаний осциллятора превышает амплитуду возбуждающего шатуна  $\phi_0$  при всех частотах в интервале между  $\omega = 0$  и  $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ . Когда частота  $\omega = 0$  вынуждающей силы превышает собственную частоту  $\omega_0 = 0$  более чем в  $\sqrt{2}$  раз, амплитуда осциллятора становится меньше амплитуды шатуна  $\phi_0$  и стремится к нулю при дальнейшем увеличении частоты — инертный маховик не успевает следовать за быстрыми движениями шатуна. В этой области частот динамический эффект вынуждающей силы слабее, чем действие такой же, но статической силы. Все это справедливо и при наличии слабого трения, только граничная частота будет немного меньше чем  $\sqrt{2}\omega_0$ , о чем можно судить по графикам  $a(\omega)$  на рис. 2.

Фазо-частотные характеристики осциллятора, т. е. графики зависимости фазы вынужденных колебаний от частоты (точнее, графики сдвига фаз  $\delta(\omega)$  между вынужденными колебаниями ротора и возбуждающего шатуна), полученные из (8) для разных значений добротности  $Q$ , показаны в левой нижней части рис. 2. Из этих графиков видно, что установившиеся колебания всегда отстают по фазе от возбуждающей силы, поскольку сдвиг фаз  $\delta(\omega)$  отрицателен при всех частотах.

Вдали от резонанса при низкой частоте  $\omega \ll \omega_0$  запаздывание почти исчезает, т. е. маховик совершает колебания в фазе с шатуном. В случае  $\omega = \omega_0$  при любом трении колебания маховика отстают от колебаний возбуждающего стержня на четверть периода ( $\delta = -\pi/2$ ): когда маховик достигает крайних отклонений, стержень проходит через среднее положение, и наоборот. Когда  $\omega$  значительно превосходит  $\omega_0$ , сдвиг фаз  $\delta$  приближается к  $-\pi$ : запаздывание маховика по фазе составляет почти  $180^\circ$ . В этом случае маховик и шатун в любой момент движутся в противоположных направлениях. Они почти одновременно пересекают нулевое деление шкалы, и почти одновременно достигают своих противоположных крайних точек.

Как следует из (8), в отсутствие трения сдвиг фаз либо равен нулю (при  $\omega < \omega_0$ ), либо  $180^\circ$

(при  $\omega > \omega_0$ ). Таким образом, при  $\omega = \omega_0$  происходит скачкообразный переход от режима колебаний маховика в фазе с шатуном к режиму колебаний в противофазе. (В отсутствие трения амплитуда маховика в точке этого перехода обращается в бесконечность.) При наличии трения, как можно видеть из рис. 2, переход от одного режима к другому происходит постепенно в некотором интервале частот в окрестности  $\omega_0$ . Ширина этого интервала частот пропорциональна постоянной затухания  $\gamma$ .

## 1.8 Резонанс угловой скорости

При установившихся колебаниях под действием синусоидальной внешней силы угловая скорость маховика  $\dot{\varphi} = a\omega \cos(\omega t + \delta)$  изменяется со временем также по гармоническому закону с частотой  $\omega$  вынуждающей силы. Выражение для амплитуды угловой скорости  $\Omega = \dot{\varphi}$  отличается от  $a(\omega)$  (8) дополнительным множителем  $\omega$ :

$$\Omega(\omega) = \omega a(\omega) = \frac{\omega_0^2 \phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + 4\gamma^2}}. \quad (12)$$

Как видно из (12), максимум резонансной кривой для скорости расположен точно при  $\omega = \omega_0$  для любых значений постоянной затухания  $\gamma$ . Поэтому резонанс угловой скорости всегда (при любом трении) происходит при совпадении частоты вынуждающей силы  $\omega$  с собственной частотой  $\omega_0$ , несмотря на то, что резонанс угла отклонения происходит при  $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ . Резонансные кривые скорости для нескольких значений добротности приведены в правой верхней части рис. 2. В нижней правой части этого рисунка показаны кривые зависимости сдвига фаз между колебаниями угловой скорости маховика и колебаниями шатуна. При резонансе скорости, т. е. при  $\omega = \omega_0$ , этот сдвиг обращается в нуль — изменения скорости происходят в фазе с изменениями вынуждающей силы, что соответствует наиболее эффективной передаче энергии осциллятору от внешнего источника, приводящего в движение возбуждающий шатун.

## 1.9 Энергетические превращения

Несмотря на то, что в установившихся вынужденных колебаниях амплитуда постоянна, энергия осциллятора остается постоянной только в среднем. В течение некоторой четверти периода колебаний энергия передается от возбуждающего шатуна к осциллятору, а в течение следующей четверти цикла энергия передается обратно от осциллятора источнику внешнего воздействия, обеспечивающему заданное принудительное движение шатуна. Поэтому, в отличие от случая собственных колебаний, не только кинетическая и потенциальная энергии осциллятора, но и его полная энергия испытывает колебания. Эти колебания полной энергии происходят с частотой, вдвое превышающей частоту внешнего воздействия.

В последующем обсуждении особое внимание уделено различиям энергетических превращений в случае кинематического возбуждения вынужденных колебаний (этот случай моделируется

в компьютерной программе) и случае динамического возбуждения, когда внешняя сила задается в виде определенной синусоидальной функции времени.

При динамическом возбуждении внешний момент сил приложен непосредственно к маховику осциллятора. Поскольку один конец спиральной пружины закреплен неподвижно, деформация пружины, а следовательно и потенциальная энергия, полностью определяются углом  $\varphi$  отклонения маховика от среднего положения:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}D\varphi^2(t) = \frac{1}{2}Da^2 \sin^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{4}J\omega_0^2 a^2 [1 - \cos 2(\omega t + \delta)]. \quad (13)$$

Кинетическая энергия осциллятора не зависит от способа возбуждения и дается следующим выражением:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2(t) = \frac{1}{2}J\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \delta) = \frac{1}{4}J\omega^2 a^2 [1 + \cos 2(\omega t + \delta)]. \quad (14)$$

Таким образом, потенциальная и кинетическая энергии при вынужденных колебаниях осциллятора изменяются с частотой  $2\omega$  в противофазе друг с другом. Отношение их максимальных (и средних) значений равно квадрату отношения собственной частоты к частоте вынуждающей силы:

$$\frac{\langle E_{\text{pot}} \rangle}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \quad (15)$$

Поэтому при  $\omega < \omega_0$  потенциальная энергия в среднем преобладает. В частности, когда  $\omega \ll \omega_0$  (медленное вращение маховика), деформация пружины имеет квазистатический характер, и почти вся энергия осциллятора — это упругая энергия деформированной пружины. Напротив, при частоте вынуждающей силы, превышающей резонансную частоту ( $\omega > \omega_0$ ), преобладает кинетическая энергия.

Особенности энергетических превращений при кинематическом возбуждении колебаний связаны с тем, что вместе с шатуном перемещается положение равновесия осциллятора и вся его потенциальная яма в целом. Деформация пружины определяется в этом случае разностью углов  $\varphi(t)$  и  $\phi(t)$ . Выражение для ее потенциальной энергии принимает вид:

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}D(\varphi - \phi)^2. \quad (16)$$

Когда частота шатуна много меньше резонансной частоты осциллятора, маховик безинерционно следует за медленно движущимся шатуном, оставаясь все время почти в положении равновесия, которое перемещается вместе с шатуном. Пружина при таком движении почти не деформирована, т. е. ее потенциальная энергия все время практически равна нулю. Иначе об этом можно сказать так: осциллятор все время находится вблизи самого дна потенциальной ямы, перемещающейся вместе с шатуном. Поэтому при низкой частоте внешнего воздействия кинетическая энергия преобладает, в противоположность случаю прямого силового возбуждения осциллятора.

При очень высокой частоте возбуждения инертный маховик не успевает следовать за быстрыми колебаниями шатуна, так что максимальные отклонения маховика от среднего положения много меньше размаха колебаний шатуна  $\phi_0$ . В таких условиях пружина оказывается сравнительно сильно закрученной (приблизительно на угол  $\phi_0$  то в одну, то в другую сторону), в то время как максимальная угловая скорость маховика сравнительно невелика. Поэтому теперь потенциальная энергия деформации пружины в среднем преобладает над кинетической энергией маховика, опять в противоположность случаю динамического возбуждения.

При малом трении (когда  $\gamma \ll \omega_0$ ), для отношения средних (и максимальных) значений потенциальной и кинетической энергий в случае кинематического возбуждения колебаний из формулы (16) для  $E_{\text{pot}}$ , а также приведенных выше выражений (1) для  $\phi(t)$  и (5) для  $\varphi(t)$  можно получить:

$$\frac{\langle E_{\text{pot}} \rangle}{\langle E_{\text{kin}} \rangle} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}. \quad (17)$$

Сравнивая (17) с (15), мы видим, что при кинематическом и прямом силовом возбуждении вынужденных колебаний соотношение между средними значениями кинетической и потенциальной энергии прямо противоположное, в соответствии с приведенными выше качественными соображениями.

## 1.10 Поглощаемая и рассеиваемая осциллятором мощность. Лоренцевский контур

Мощность, рассеиваемая (превращаемая в теплоту) осциллятором при установившихся вынужденных колебаниях, определяется работой, совершаемой моментом силы вязкого трения в единицу времени:

$$P_{\text{расс}} = N_{\text{тр}}\dot{\varphi} = -2J\gamma\dot{\varphi}^2 = -2J\gamma\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \delta). \quad (18)$$

Здесь амплитуда  $a$  и сдвиг фаз  $\delta$  определяются выражениями (8). Как видно из (18), рассеяние энергии происходит неравномерно в течение периода: скорость диссипации максимальна в моменты прохождения ротора через среднее положение, и уменьшается до нуля в точках его наибольшего отклонения (в точках поворота), когда угловая скорость ротора обращается в нуль. Усредняя рассеиваемую мощность по периоду колебаний, получаем:

$$\langle P_{\text{расс}} \rangle = -J\gamma\omega^2 a^2 = -J\gamma\omega^2 \frac{\omega_0^4 \phi_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}. \quad (19)$$

Поглощаемая осциллятором мощность, т. е. мощность, передаваемая осциллятору внешним источником, обеспечивающим принудительное движение шатуна, определяется совершаемой в единицу времени работой приложенного к шатуну момента внешней силы. Если не принимать во внимание момент инерции шатуна (считая его малым по сравнению с моментом инерции маховика), то внешний момент равен упругому моменту деформированной пружины:  $N_{\text{внеш}} = D(\varphi - \phi) = J\omega_0^2(\varphi - \phi)$ . Для нахождения мгновенного значения передаваемой осциллятору мощности нужно

умножить этот момент, предварительно подставив в него  $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$  и  $\dot{\phi}(t) = \dot{\phi}_0 \sin(\omega t)$ , на угловую скорость шатуна  $\dot{\phi} = \omega \phi_0 \cos \omega t$ . Усредняя полученное выражение по периоду колебаний, получим:

$$\langle P_{\text{погл}} \rangle = -\frac{1}{2} J \omega_0^2 a \omega \sin \delta. \quad (20)$$

После подстановки в (20) значений  $a$  и  $\delta$  получим для среднего значения поглощаемой мощности выражение, совпадающее с (19) для средней рассеиваемой осциллятором мощности: при установившихся колебаниях осциллятор рассеивает в среднем за период столько же энергии, сколько получает от внешнего источника. При этом мгновенные значения рассеиваемой и получаемой мощности не совпадают — кроме систематической подпитки осциллятора энергией, идущей на компенсацию потерь из-за трения, в течение периода происходит и двунаправленный обмен энергией.

В случае сравнительно слабого трения полученное выражение для средней рассеиваемой (и поглощаемой) осциллятором мощности можно упростить. При  $\gamma \ll \omega_0$  (или  $Q \gg 1$ ) пик резонансной кривой резкий и узкий: осциллятор избирательно реагирует на синусоидальное внешнее воздействие только в узкой полосе частот в окрестности частоты собственных колебаний. Когда нас интересует поглощаемая мощность на частотах  $\omega$ , близких к  $\omega_0$ , разность квадратов этих частот в знаменателе (19) можно записать следующим образом:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0 \Delta\omega, \quad (21)$$

где  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  — расстройка частоты возбуждения относительно резонанса, т. е. частота, отсчитанная от резонансного значения  $\omega_0$ . После подстановки (21) в (19), получаем следующее приближенное выражение для средней поглощаемой мощности:

$$\langle P_{\text{погл}} \rangle = \frac{\gamma J \omega_0^4 \phi_0^2 / 4}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (22)$$

Эту зависимость средней поглощаемой мощности от частоты удобно представить в нормализованной форме  $F(\Delta\omega)$ , разделив  $\langle P_{\text{погл}}(\Delta\omega) \rangle$  на ее максимальное значение, достигаемое при  $\Delta\omega = 0$ :

$$F(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau^2} = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}, \quad (23)$$

где  $\tau = 1/\gamma$  — характерное время (время затухания) осциллятора. Описываемая выражением (23) спектральная зависимость часто встречается в различных физических проблемах и называется *лоренцевским контуром*. (Происхождение названия связано с тем, что такая спектральная зависимость поглощения энергии предсказывается развитой Г.Лоренцем электронной теорией.) В частности, спектры поглощения и испускания света атомами в определенных физических условиях описываются лоренцевским контуром. График этой функции показан на рис. 3. Он имеет вид симметричного пика, центр которого расположен при  $\Delta\omega = 0$ , т. е. при  $\omega = \omega_0$ . При смещении от этого положения (от максимума) в любую сторону на  $\Delta\omega = 1/\tau = \gamma$  поглощаемая

мощность уменьшается до половины своего максимального значения. Таким образом, ширина лоренцевского контура на половине высоты (полуширина) составляет  $2\gamma = 2/\tau$ .

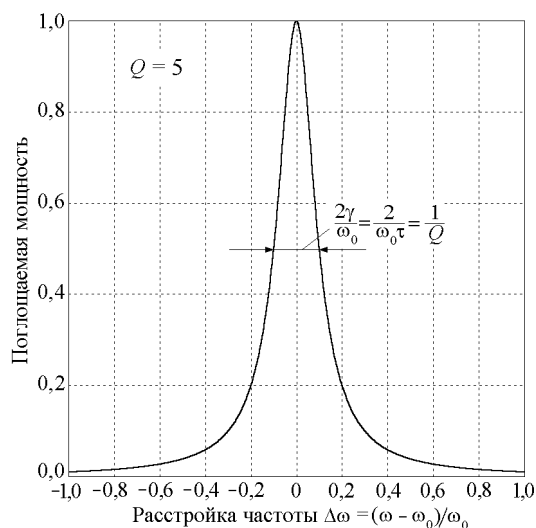


Рис. 3: Спектральная зависимость мощности, поглощаемой осциллятором в установившихся колебаниях (лоренцевский контур).

### 1.11 Переходные процессы

Амплитуда и фаза установившихся вынужденных колебаний не зависят от начальных условий: за время установления колебаний осциллятор их полностью «забывает». Напомним, что установившиеся колебания описываются периодическим частным решением (5) неоднородного дифференциального уравнения (4). Характеризующие это решение амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики — резонансные кривые на рис. 2, как и лоренцевский спектральный контур поглощаемой мощности на рис. 3, — относятся только к режиму установившихся колебаний.

Начальные условия, т. е. угол отклонения  $\varphi(0)$  и угловая скорость  $\dot{\varphi}(0)$  в момент  $t = 0$  включения внешнего воздействия, сказываются только во время *переходного процесса* установления колебаний. В течение переходного процесса затухающие собственные колебания накладываются на установившиеся вынужденные колебания. Математически этот процесс описывается суммой частного решения (5) неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения, т. е. уравнения (4) с равной нулю правой частью. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (4) можно записать в виде:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta) + C e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (24)$$

содержащем произвольные постоянные  $C$  и  $\theta$ . Их значения определяются из начальных условий.

Мы видим, что переходный процесс описывается суперпозицией синусоидальных колебаний неизменной амплитуды  $a$  на частоте внешнего воздействия  $\omega$ , и затухающих колебаний на частоте  $\omega_1$  с экспоненциально убывающей амплитудой. Теоретически переходный процесс продолжается бесконечно долго, но практически его можно считать закончившимся к тому времени, когда вклад собственных колебаний с частотой  $\omega_1$  в 4.14а «вымирает», т. е. их амплитуда  $Ce^{-\gamma t}$  становится пренебрежимо малой по сравнению с амплитудой  $a$  установившихся колебаний. При нулевых начальных условиях  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$  (осциллятор покоился в положении равновесия до включения периодической внешней силы) это происходит приблизительно через  $Q$  периодов собственных колебаний, где  $Q = \omega_0/2\gamma$  — добротность осциллятора, обратно пропорциональная постоянной затухания собственных колебаний. Вообще говоря, переходный процесс тем продолжительнее, чем меньше трение в системе. Однако возможны такие начальные условия, при которых переходного процесса не будет совсем (см ниже).

Частота  $\omega_1$  при слабом и умеренном трении очень близка к собственной частоте  $\omega_0 = \sqrt{D/J}$  (т. е. к частоте, с которой происходят собственные колебания осциллятора в отсутствие трения):

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right). \quad (25)$$

В большинстве практически важных случаев относительное различие этих частот  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0$  столь мало, что им можно пренебречь и положить  $\omega_1 = \omega_0$ . В самом деле, если  $Q = 5$ , эта относительная разность составляет всего лишь 0.5%:  $(\omega_0 - \omega_1)/\omega_0 = 0.005$ .

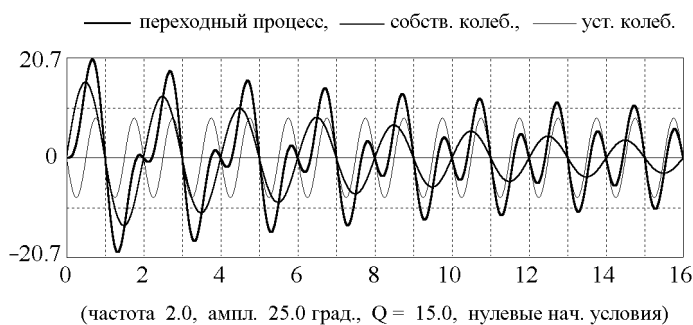


Рис. 4: Разложение переходного процесса на сумму установившихся вынужденных колебаний и затухающих собственных колебаний.

При работе с моделирующей компьютерной программой можно открыть окно «Графики от времени» и выбрать опцию «Разложение переходного процесса». Тогда при моделировании на экран будут одновременно выводиться также графики простых составляющих (синусоидальных установившихся колебаний и затухающих собственных колебаний), из которых складывается

изучаемый переходный процесс. Пример такого разложения переходного процесса на составляющие показан на рис. 4.

### 1.12 Условия отсутствия переходного процесса

Как уже отмечалось, можно задать начальные условия так, чтобы переходного процесса не было совсем, т. е. чтобы сразу после включения периодического внешнего воздействия происходили установившиеся вынужденные колебания. Очевидно, что начальная амплитуда  $C$  вклада собственных колебаний в общее решение (24) будет равна нулю, если установившиеся колебания, описываемые вторым членом в (24), будут сами удовлетворять начальным условиям, без добавления собственных колебаний, т. е. первого члена в (24). Для этого начальное отклонение  $\varphi(0)$  должно быть равным  $a \sin \delta$ , а начальная скорость  $\dot{\varphi}(0)$  должна быть равна  $a\omega \cos \delta$ , где  $a$  и  $\delta$  — амплитуда и фаза установившихся колебаний, определяемые формулами (8). При таких начальных условиях в (24)  $C = 0$ , т. е. после включения внешнего воздействия колебания на собственной частоте вообще не возникают, и с самого начала происходят вынужденные колебания неизменной частоты и амплитуды.

Из-за переходных процессов явление вынужденных колебаний представляется значительно более сложным по сравнению с простыми синусоидальными установившимися колебаниями. Но во многих практически важных случаях переходные процессы представляют самостоятельный интерес. Следует уделить должное внимание их изучению при работе с моделирующей компьютерной программой.

### 1.13 Резонансная раскачка осциллятора

Ограничимся рассмотрением переходных процессов при нулевых начальных условиях, т. е. при раскачке внешней периодической силой осциллятора, находившегося до ее включения в состоянии покоя в положении равновесия:

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (26)$$

В момент времени  $t = 0$  шатун, раскачивающий осциллятор, начинает двигаться из своего среднего положения по закону:

$$\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t. \quad (27)$$

Рассмотрим случай раскачки осциллятора с малым трением ( $\gamma \ll \omega_0$ ) синусоидальной внешней силой, настроенной в резонанс, т. е. на частоту собственных колебаний осциллятора  $\omega_1 \approx \omega_0$ . Как следует из (8), периодическое частное решение, описывающее установившиеся колебания, при  $\omega = \omega_0$  имеет вид:

$$\varphi(t) \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} \phi_0 \sin \left( \omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = -Q \phi_0 \cos \omega_0 t. \quad (28)$$



В рассматриваемом случае амплитуда колебаний маховика превосходит амплитуду шатуна в  $Q = \omega_0/2\gamma$  раз, а запаздывание по фазе составляет  $-\pi/2$  — движение маховика отстает на четверть цикла от колебаний шатуна.

Прибавим к периодическому частному решению (28) общее решение однородного уравнения с  $\omega_1 = \omega_0$ :

$$\varphi(t) = -Q\phi_0 \cos \omega_0 t + Ce^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t + \theta). \quad (29)$$

Произвольные постоянные  $C$  и  $\theta$  определим так, чтобы для  $\varphi(t)$  в (29) удовлетворялись начальные условия (26). В рассматриваемом случае слабого трения ( $\gamma \ll \omega_0$ ) экспоненциальный множитель  $e^{-\gamma t}$  в (29) на протяжении периода колебаний почти не изменяется. Поэтому при дифференцировании (29) по времени этот множитель можно считать постоянным:

$$\dot{\varphi}(t) \approx Q\phi_0\omega_0 \sin \omega_0 t - Ce^{-\gamma t}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \theta). \quad (30)$$

Тогда из начального условия  $\dot{\varphi}(0) = 0$  находим  $\theta = 0$ , а из условия  $\varphi(0) = 0$  получаем  $C = Q\phi_0$ . Таким образом, при  $Q \gg 1$  и  $\omega = \omega_0$  решение дифференциального уравнения (5), удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид:

$$\varphi(t) = -Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t = -b(t) \cos \omega_0 t, \quad (31)$$

где

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}). \quad (32)$$

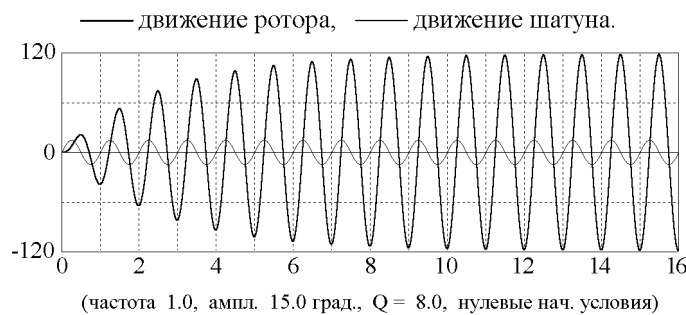


Рис. 5: Переходный процесс при резонансе (графики угла отклонения для возбуждающего шатуна и маховика осциллятора при нулевых начальных условиях).

Такая суперпозиция вынужденных и слабо затухающих собственных колебаний той же частоты может рассматриваться как одно «почти гармоническое» колебание с частотой  $\omega_0$ , амплитуда которого  $b(t)$  медленно нарастает со временем, монотонно приближаясь к постоянному значению  $Q\phi_0$ , соответствующему установившимся колебаниям (рис.5). Характерное время

установления амплитуды  $\tau = 1/\gamma$  совпадает со временем жизни собственных колебаний в этой же системе.

Качественно такое поведение осциллятора легко объяснить с помощью энергетических соображений. При большой добротности  $Q$  осциллятор при резонансе раскачается до амплитуды  $Q\phi_0$ , значительно (в  $Q$  раз) превосходящей амплитуду шатуна. Чем выше добротность, тем большую энергию запасет осциллятор и, следовательно, тем больше времени (большее число колебаний шатуна) требуется для того, чтобы сообщить ему эту энергию.

При слабом трении продолжительность резонансной раскачки составляет много периодов колебаний:  $\tau \gg T_0$ . Рост амплитуды на начальном этапе раскачки происходит почти по линейному закону. Это можно увидеть из уравнения (32), полагая в нем  $\gamma t \ll 1$ . Разлагая экспоненту в степенной ряд и ограничиваясь линейным по  $\gamma t$  членом, получаем:

$$b(t) = Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) = \frac{\omega_0}{2\gamma}\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \approx \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t. \quad (33)$$

Независимость полученного выражения от постоянной затухания  $\gamma$  означает, что на начальном этапе резонансной раскачки осциллятора из состояния покоя рост амплитуды происходит практически с такой же скоростью, как и в отсутствие трения. В идеализированном случае полного отсутствия трения линейный рост амплитуды продолжался бы неограниченно. Уравнение (4) при  $\gamma = 0$  и  $\omega = \omega_0$  не имеет периодического частного решения. Его частное решение  $\varphi(t) = -\frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t \cos \omega_0 t$  соответствует неограниченному линейному росту амплитуды. Чтобы получить общее решение уравнения (4) с двумя произвольными постоянными, мы должны добавить еще общее решение однородного уравнения, которое описывает в данном случае незатухающие собственные колебания. Определяя произвольные постоянные из начальных условий, получаем:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\phi_0(\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t). \quad (34)$$

Амплитуда этого колебания частотой  $\omega_0$  равна  $\frac{1}{2}\phi_0\sqrt{(\omega_0 t)^2 + 1} \approx \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t$ . Это значит, что при отсутствии трения такая идеализированная система «идет вразнос» и установление вынужденных колебаний при  $\omega = \omega_0$  невозможно. Фактически это означает, что принятая модель в данном случае неприменима: при описании резонанса трение необходимо учитывать, сколь бы слабым они ни было. В реальной системе при достаточно больших амплитудах либо становится недопустимым пренебрежение трением, либо зависимость восстанавливающего упругого момента становится нелинейной (при больших деформациях пружины проявляются отклонения от закона Гука). В последнем случае нелинейность системы приводит к неизохронности колебаний и связанному с этим нарушению условий резонанса при колебаниях с большими амплитудами. Это обстоятельство ограничивает рост амплитуды даже в отсутствие трения. Которая из этих причин проявляет себя раньше и в действительности ограничивает резонансный рост амплитуды в реальной физической системе, зависит от свойств конкретной системы, не учитываемых в рассматриваемой упрощенной модели осциллятора.

### 1.14 Классический механический аналог вынужденного излучения

Как мы убедились, при точной настройке частоты внешнего воздействия на собственную частоту осциллятора происходит монотонный рост амплитуды вынужденных колебаний. В отсутствие трения, как видно из выражения (34), амплитуда растет неограниченно практически по линейному закону  $\frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t$ . Рост энергии осциллятора происходит при этом за счет работы внешнего источника, обеспечивающего заданное принудительное движение возбуждающего шатуна. Зададимся теперь вопросом: возможна ли в условиях точной настройки в резонанс обратная передача энергии от осциллятора внешнему источнику?

Рассмотренный выше процесс раскачки осциллятора из состояния покоя в положении равновесия обеспечивался определенными фазовыми соотношениями между колебаниями шатуна и осциллятора. Эти соотношения были благоприятны для передачи энергии от внешнего источника к осциллятору: как следует из (34), практически с самого начала колебания скорости маховика происходили по закону  $\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\phi_0\omega_0^2 t \sin \omega_0 t$ , т. е. его угловая скорость изменялась в одинаковой фазе с приложенным к нему внешним крутящим моментом  $D\phi_0 \sin \omega_0 t$ , который входит в правую часть дифференциального уравнения вынужденных колебаний (5). При таком движении внешний момент все время действует на маховик в направлении его вращения, т. е., образно говоря, «подталкивает его в спину», в направлении его движения. Напомним, что так происходит при нулевых начальных условиях.

Но что будет, если осциллятор в момент включения внешней силы уже находится в возбужденном состоянии, т. е. обладает энергией и совершает собственные колебания? Ясно, что дальнейший ход процесса зависит от соотношения фаз между уже существующими колебаниями маховика и колебаниями возбуждающего шатуна. Если колебания угловой скорости маховика и теперь совершаются в одинаковой фазе с колебаниями внешнего крутящего момента, то энергия опять будет передаваться от внешнего источника к осциллятору, и амплитуда существующих колебаний начнет увеличиваться сразу после включения внешнего воздействия. Но если угловая скорость маховика изменяется в противофазе с внешним моментом, т. е. по закону  $\dot{\varphi}(t) \propto -\sin \omega_0 t$ , то изменяющийся как  $\sin \omega_0 t$  внешний момент будет все время направлен навстречу скорости маховика и будет замедлять его вращение: энергия будет передаваться от осциллятора к источнику внешнего воздействия. Конечно, этот процесс будет продолжаться лишь до тех пор, пока амплитуда колебаний маховика не обратится в нуль, т. е. пока вся энергия осциллятора не будет передана внешнему источнику. Дальше все будет происходить так, как при нулевых начальных условиях, т. е. при раскачке осциллятора из состояния покоя: начнется рост амплитуды колебаний осциллятора, так как установятся фазовые соотношения, благоприятные для передачи энергии осциллятору.

Легко видеть, что при движении шатуна по закону  $\phi(t) = \phi_0 \sin \omega_0 t$  фаза собственных колебаний, благоприятная для передачи энергии от осциллятора к внешнему источнику, будет обеспечена, например, при начальном отклонении маховика в положительном направлении и нулевой начальной скорости, т. е. при начальных условиях вида  $\varphi(0) = \varphi_0$  (где  $\varphi_0 > 0$ ),  $\dot{\varphi}(0) = 0$ . Соответствующее таким начальным условиям решение дифференциального уравнения (5) имеет вид:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (\varphi_0 - \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2}\phi_0 \sin \omega_0 t \\ &\approx (\varphi_0 - \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t) \cos \omega_0 t.\end{aligned}\quad (35)$$

Последнее приближенное выражение справедливо, когда можно пренебречь вкладом собственных колебаний с синусоидальной зависимостью от времени в функцию  $\varphi(t)$ , определяемую соотношением (35), т. е. когда постоянная амплитуда этих колебаний  $\frac{1}{2}\phi_0$  мала по сравнению с зависящей от времени амплитудой  $|\varphi_0 - \frac{1}{2}\phi_0\omega_0 t|$  первого члена в (35) с косинусоидальной зависимостью. Из (35) следует, что амплитуда колебаний сначала убывает по линейному закону почти до нуля на протяжении промежутка времени  $t = 2\varphi_0/(\omega_0\phi_0) = (\varphi_0/\pi\phi_0)T_0$ . Затем зависящий от времени амплитудный множитель в (35) изменяет знак. Это значит, что соотношение фаз между колебаниями маховика и возбуждающего шатуна становится таким же, как и в рассмотренном ранее случае резонансной раскачки из состояния покоя, т. е. благоприятным для передачи энергии осциллятору от внешнего источника. В результате далее происходит неограниченный рост амплитуды. График угла отклонения для такого процесса показан на рис. 6.

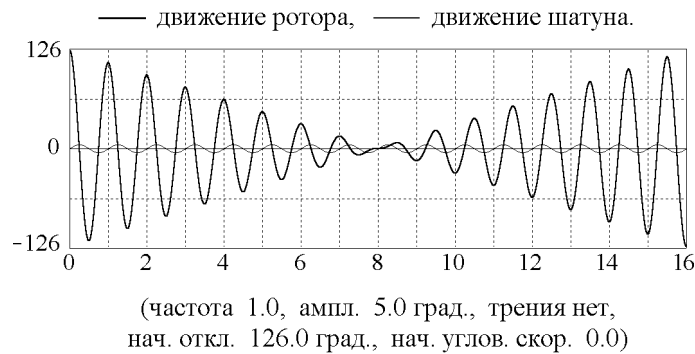


Рис. 6: Передача энергии возбужденного осциллятора внешнему источнику (и обратно) в условиях точной настройки в резонанс.

Рассмотренным выше процессам резонансного взаимодействия осциллятора с внешним периодическим источником можно сопоставить известные в оптике явления поглощения и вынужденного испускания света атомами. Осциллятор можно рассматривать как аналог атома, точнее, его оптического электрона, связанного в атоме квазиупругой силой и способного совершать собственные колебания на определенной частоте. Внешний источник, раскачивающий осциллятор, можно рассматривать как аналог электромагнитного поля световой волны, взаимодействующей с атомом. При этом энергия может передаваться либо атому от светового поля, частота которого совпадает с собственной частотой атома (точнее, с частотой, соответствующей переходу оптического электрона в атоме между уровнями энергии стационарных состояний), что соответствует

поглощению света, либо может передаваться от возбужденного атома взаимодействующей с ним электромагнитной волне, что соответствует вынужденному испусканию света. Которая из этих возможностей фактически реализуется, зависит от соотношения фаз колебаний электромагнитного поля в волне и оптического электрона в атоме.

В случае передачи энергии от атома электромагнитному полю возрастает амплитуда (и энергия) световой волны при сохранении остальных ее характеристик (в том числе фазы). Это обстоятельство позволяет понять когерентный характер вынужденного излучения света большим числом возбужденных атомов в поле одной и той же световой волны. Именно высокой когерентностью вынужденного излучения определяются такие замечательные свойства лазеров, как концентрация энергии их излучения в спектре (высокая степень монохроматичности), способность к максимальной (совместимой с волновой природой света) концентрации энергии света в пространстве и по направлению распространения (фокусировка), возможность концентрации энергии во времени (генерация сверхкоротких импульсов).

Некогерентное спонтанное излучение света возникает, когда отдельные возбужденные атомы источника испускают несогласованные по фазе элементарные световые волны. В механической модели таким процессам можно сопоставить собственные затухающие колебания осциллятора. В процессе спонтанного испускания света атомом роль трения играет сила реакции излучаемой осциллирующим электроном световой волны (радиационное трение). Вызываемое вязким трением рассеяние механической энергии при собственных колебаниях осциллятора (превращение механической энергии упорядоченного движения в теплоту) аналогично переходу энергии возбужденных атомов в энергию хаотических колебаний электромагнитного поля спонтанного излучения.

Рассмотренная аналогия безусловно полезна для понимания оптических явлений, но ее нельзя воспринимать слишком буквально. В действительности процессы поглощения и испускания света атомами подчиняются квантовым законам, которые предсказывают лишь вероятности тех или иных результатов взаимодействия света с атомом. Поэтому детерминированные процессы в механическом осцилляторе нужно сопоставлять не отдельному атому, а статистическому ансамблю атомов, взаимодействующих с излучением.

### 1.15 Переходные процессы вблизи резонанса

Если частота вынуждающего воздействия близка к частоте собственных затухающих колебаний осциллятора, то в переходном процессе установления колебаний, пока собственные колебания не затухли, происходит сложение колебаний с близкими частотами  $\omega$  и  $\omega_1$ . (Как уже отмечалось, частота  $\omega_1$  почти равна собственной частоте  $\omega_0$  в практически важных случаях, когда трение не слишком велико [(см. (25)], так что в дальнейшем мы не будем делать различия между  $\omega_0$  и  $\omega_1$ .) Такое наложение колебаний порождает *модулированное колебание*, т. е. почти синусоидальное колебание со средней частотой, амплитуда которого медленно поочередно возрастает и убывает со сравнительно низкой *частотой биений*  $|\omega - \omega_0|$ , равной модулю разности собственной и вынуждающей частот.

Сначала вынуждающая сила раскачивает осциллятор до амплитуды, превышающей установившееся значение. Затем разность фаз, накопившаяся между колебаниями маховика и шатуна, приводит к обратной передаче энергии от осциллятора к источнику внешнего воздействия, и амплитуда начинает убывать. Дальнейшее изменение разности фаз двух колебаний снова приведет к росту амплитуды, которое через некоторое время опять сменится убыванием, и так далее.

При наличии трения эти процессы модуляции, т. е. чередования медленного роста и убывания амплитуды (*переходные биения*) становятся все менее выраженными по мере затухания вклада колебаний на собственной частоте. На рисунке 7 приведен график переходных биений для случая, когда первоначально маховик покоился в положении равновесия, а частота вынуждающей силы  $\omega = 0.8\omega_0$ , т. е. четыре цикла ее изменения совершаются на протяжении пяти периодов собственных колебаний. (На графике время отложено в единицах периода вынуждающей силы  $T$ .) Таким образом, один период биений  $T_b = 2\pi/|\omega - \omega_0|$  равен четырем периодам внешнего воздействия  $T = 2\pi/\omega$  и пяти периодам собственных колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ .

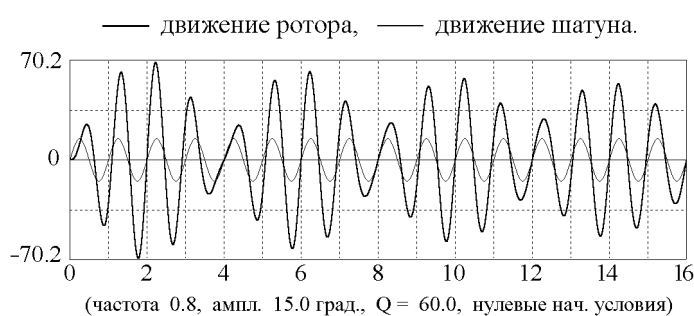


Рис. 7: Постепенно затухающие переходные биения в переходном процессе вблизи резонанса (при нулевых начальных условиях).

В отсутствие трения вклад колебаний на собственной частоте не затухает, и на протяжении переходного процесса происходит сложение двух близких по частоте гармонических колебаний с неизменными амплитудами. При нулевых начальных условиях их амплитуды относятся как  $\omega/\omega_0$ . В результате возникают незатухающие биения, т. е. почти гармонические колебания на средней частоте с амплитудой, медленно изменяющейся со временем по синусоидальному закону. В идеализированном случае полного отсутствия трения установившихся колебаний не существует, за исключением рассмотренного выше случая специфических начальных условий, при которых переходный процесс отсутствует).

## 1.16 Переходные процессы вдали от резонанса

Здесь мы рассмотрим случаи, когда частота внешнего воздействия значительно отличается от собственной частоты осциллятора.

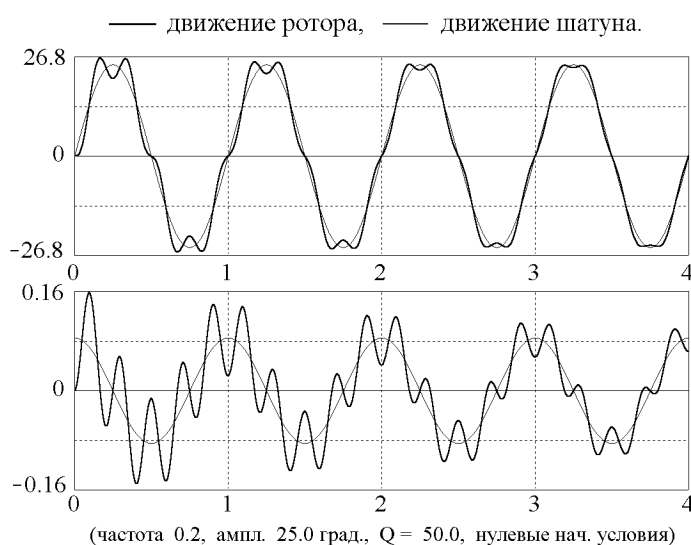


Рис. 8: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора в переходном процессе при низкой частоте возбуждения ( $\omega \ll \omega_0$ ).

Если внешняя частота много меньше собственной частоты ( $\omega \ll \omega_0$ ), положение равновесия осциллятора медленно смещается вместе с шатуном поочередно вправо и влево, а ротор совершает около такого медленно движущегося положения равновесия сравнительно быстрые постепенно затухающие колебания на собственной частоте. В результате на медленные установившиеся колебания неизменной амплитуды накладываются искажающие их быстрые собственные колебания постепенно уменьшающейся амплитуды.

Пример такого переходного процесса с  $\omega = 0.8\omega_0$  показан на рис. 8. По мере затухания собственных колебаний высокочастотные искажения графика уменьшаются, и в конце концов медленные вынужденные колебания принимают правильную синусоидальную форму.

В противоположном случае высокой частоты принудительного движения шатуна на протяжении переходного процесса быстрые вынужденные колебания неизменной амплитуды происходят около некоторого движущегося среднего положения, которое совершает медленные затухающие колебания на собственной частоте осциллятора.

Графики угла отклонения и угловой скорости для такого переходного процесса показаны на рис. 9 вместе с графиками составляющих его быстрых вынужденных синусоидальных колебаний неизменной амплитуды и медленных затухающих собственных колебаний. Когда медленные собственные колебания затухают, остаются только быстрые колебания, симметричные относительно точки  $\phi = 0$  (т. е. относительно среднего положения шатуна). Эти быстрые колебания маховика происходят в противофазе с принудительными колебаниями шатуна. Амплитуда установившихся быстрых колебаний значительно меньше амплитуды вынуждающего шатуна.

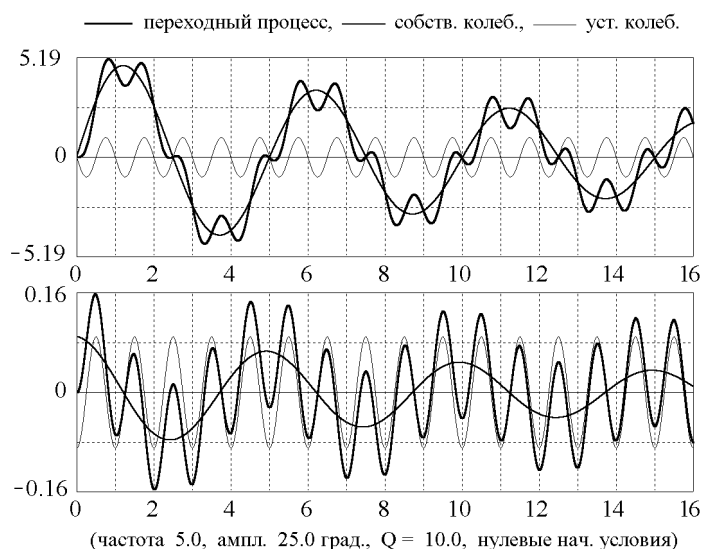


Рис. 9: Графики угла отклонения и угловой скорости ротора в переходном процессе при высокой частоте возбуждения ( $\omega \gg \omega_0$ ).

### 1.17 Фазовая траектория переходных процессов и сечения Пуанкаре

Уравнение движения (4), описывающее вынужденные колебания, содержит время  $t$  явным образом: в правую часть этого уравнения входит заданная функция времени  $\phi(t) = \phi_0 \sin \omega t$ , описывающая принудительное периодическое движение возбуждающего шатуна. Поэтому механическое состояние рассматриваемой физической системы определяется тремя переменными: кроме угла отклонения  $\varphi$  и угловой скорости  $\dot{\varphi}$ , еще и временем  $t$ .

Для полной графической характеристики механического состояния такой системы двумерное фазовое пространство, т. е. плоскость  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , целесообразно дополнить еще одним (третьим) измерением — осью времени  $t$ , направленной перпендикулярно к фазовой плоскости. В моделирующей компьютерной программе на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$  отображается соответствующая проекция трехмерной фазовой траектории вынужденных колебаний осциллятора.

Наглядное представление о характере переходного процесса в целом можно получить, если на этой двумерной проекции фазовой траектории выделить точки, соответствующие равноотстоящим моментам времени, разделенным интервалами, равными периоду внешнего воздействия  $T = 2\pi/\omega$ , например, моментам, когда шатун, двигаясь слева направо, проходит через свое среднее положение (пересекает нулевое деление шкалы). Это так называемые *сечения Пуанкаре*. В нашем случае они показывают угловое положение маховика и его угловую скорость  $(\varphi, \dot{\varphi})$  в моменты времени  $t = T, 2T, \dots, nT$ . В компьютерной программе можно получить отображение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости, открыв соответствующее окно с помощью панели управления программой.



В установившихся вынужденных колебаниях, период которых равен периоду внешнего воздействия, трехмерная фазовая траектория пересекает все плоскости  $t = T, 2T, \dots, nT$  при одних и тех же значениях  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ . Поэтому сечения Пуанкаре на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$  для всех моментов времени  $t = T, 2T, \dots, nT$  совпадают. Однако для переходного процесса установления колебаний сечения Пуанкаре образуют некоторое множество точек на плоскости  $(\varphi, \dot{\varphi})$ , постепенно сгущающееся к точке  $\varphi = a \sin \delta, \dot{\varphi} = a\omega \cos \delta$ , соответствующей установившимся колебаниям.

На резонансной частоте ( $\omega = \omega_0$ ) колебания маховика отстают от колебаний возбуждающего шатуна по фазе на четверть периода ( $\delta = \pi/2$ ), и точка сгущения сечений Пуанкаре для резонансного переходного процесса имеет координаты  $\varphi = -a, \dot{\varphi} = 0$ . Если заданы нулевые начальные условия, т. е. движение возбуждающего шатуна начинается, когда маховик покоится в положении равновесия, все точки сечений Пуанкаре лежат на оси абсцисс фазовой плоскости, выходя из начала координат при  $t = 0$  и приближаясь постепенно к указанной выше точке сгущения  $\varphi = -a, \dot{\varphi} = 0$ . Начальный участок проекции фазовой траектории с сечениями Пуанкаре для такого процесса показан в левой части рис. 10. Правая часть этого рисунка соответствует процессу переходных биений при  $\omega = 0.8 \omega_0$ , график которого показан на рис. 7, стр. 22.

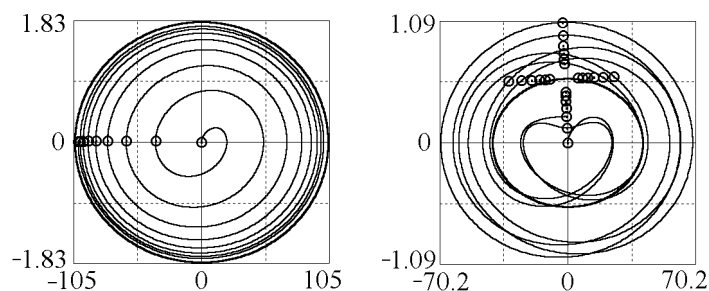


Рис. 10: Проекция фазовых траекторий с сечениями Пуанкаре для процесса резонансной раскачки осциллятора из состояния покоя (слева) и для переходных биений при  $\omega = 0.8 \omega_0$  (справа).

## 2 Контрольные вопросы и задачи

### 2.1 Установившиеся вынужденные колебания

При изучении установившихся колебаний с помощью моделирующей компьютерной программы нет необходимости дожидаться, пока произойдет установление колебаний. Для того, чтобы сразу происходило моделирование установившихся колебаний, достаточно выбрать опцию «Установившиеся колебания» в панели управления. При этом программа автоматически выбирает начальные условия  $\varphi(0) = a \sin \delta$  и  $\dot{\varphi}(0) = a\omega \cos \delta$ , обеспечивающие отсутствие переходного процесса, независимо от введенных Вами начальных условий. Необходимые значения амплитуды  $a$  и сдвига фаз  $\delta$  программа рассчитывает на основе выражений (8), используя введенные Вами значения вынуждающей частоты  $\omega$  и добротности осциллятора  $Q$ .

### 1.1 Установившиеся вынужденные колебания в отсутствие трения.

(а) Строго говоря, в отсутствие трения переходный процесс продолжается бесконечно долго, так что установившиеся колебания неизменной амплитуды возможны только при указанных выше начальных условиях. Имеет ли какой-либо физический смысл аналитическое решение  $\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta)$  с  $a = \phi_0 \omega_0^2 / (\omega_0^2 - \omega^2)$ , описывающее установившиеся колебания при  $\gamma = 0$ , для каких-либо иных начальных условий? Можно ли применять это решение к реальным физическим системам? Если да, то при каких условиях возможно наблюдать описываемое этим решением движение в реальных системах?

(б) Убедитесь на опыте, что при вынуждающих частотах, меньших собственной частоты осциллятора (т. е. при  $\omega < \omega_0$ ), установившиеся вынужденные колебания происходят в одинаковой фазе с колебаниями возбуждающего шатуна. При какой частоте амплитуда колебаний маховика будет в два раза превосходить амплитуду шатуна? Рассчитайте эту частоту и проверьте свой результат с помощью моделирующего эксперимента.

(в) Убедитесь, что при вынуждающих частотах, больших чем собственная частота (т. е. при  $\omega > \omega_0$ ), колебания маховика происходят в противофазе с колебаниями возбуждающего шатуна. При каком значении частоты ( $\omega > \omega_0$ ) амплитуда маховика опять будет вдвое превосходить амплитуду шатуна? При какой частоте амплитуды маховика и шатуна будут равны? При какой частоте амплитуда вынужденных колебаний маховика будет вдвое меньше амплитуды шатуна? Проверьте свои ответы в эксперименте.

### 1.2\* Превращения энергии при установившихся вынужденных колебаниях.

(а) Используя графики потенциальной, кинетической и полной механической энергии, выясните, во время каких частей цикла вынужденных колебаний энергия передается от шатуна (точнее, от внешнего источника, обеспечивающего заданное принудительное движение шатуна) осциллятору. Приведите физическое объяснение наблюдаемому направлению переноса энергии. На протяжении каких частей цикла происходит обратная передача энергии от осциллятора к внешнему источнику?

(б) В случае кинематического возбуждения вынужденных колебаний, чему равно отношение средних значений потенциальной и кинетической энергии для тех значений частоты возбуждения, при которых амплитуда маховика вдвое превосходит амплитуду шатуна? Для значения частоты, при котором эти амплитуды равны? Для случая, когда амплитуда маховика вдвое меньше амплитуды шатуна? Сравните наблюдаемые на экспериментальных графиках значения с полученными Вами теоретическими значениями этого отношения средних энергий.

**1.3 Амплитуда установившихся колебаний и их запаздывание по фазе.** Введите некоторое значение добротности осциллятора, скажем,  $Q = 5$ .

(а) Оцените, на сколько процентов резонансная частота в этом случае ниже собственной частоты осциллятора  $\omega_0$ .

(б) Чему равно отношение амплитуды маховика при резонансе к амплитуде вынуждающего шатуна?

(в) Чему равен сдвиг фаз (в радианах и в долях периода колебаний) между колебаниями маховика и шатуна на резонансной частоте и на частоте, составляющей 0.8 резонансного значения?

Дайте ответы на те же вопросы для  $Q = 20$ .

**1.4\*\* Особенности кинематического возбуждения колебаний.** В случае динамического возбуждения колебаний заданной периодической силой, величина которой не зависит от положения маховика, отношение средних значений потенциальной и кинетической энергий равно  $(\omega_0/\omega)^2$ , так что при низких частотах в среднем преобладает потенциальная энергия.

(а) Проанализируйте изменение со временем каждого из видов энергии и полной энергии осциллятора при кинематическом возбуждении. Почему, несмотря на совпадение дифференциальных уравнений для случаев динамического и кинематического возбуждения колебаний, в энергетических превращениях имеются определенные различия? Рассчитайте отношение средних значений потенциальной и кинетической энергии для кинематического способа возбуждения колебаний. Приведите качественные физические соображения для объяснения отличия этого отношения от случая динамического возбуждения колебаний.

(б) При какой частоте возбуждения средние значения потенциальной и кинетической энергии одинаковы?

(в) В случае динамического возбуждения установившихся колебаний при резонансе максимальные (и средние) значения двух видов энергии одинаковы, а их изменения происходят точно в противофазе, так что полная механическая энергия осциллятора остается неизменной. Внешний источник лишь компенсирует потери энергии из-за трения. Однако при кинематическом возбуждении осциллятора его полная энергия испытывает вариации даже при резонансе. Рассчитайте, на сколько процентов максимальные и минимальные значения каждого из видов энергии при резонансе отличаются от их средних значений.

**1.5\*\* Установившиеся колебания при разных частотах.**

(а) Пусть частота  $\omega$  принудительного движения шатуна немного ниже собственной частоты осциллятора  $\omega_0$ , скажем,  $\omega = 0.9\omega_0$ , и пусть добротность  $Q$  равна 5. Чему равно отношение амплитуды установившихся колебаний к амплитуде при резонансе? Какую долю цикла составляет отставание по фазе колебаний маховика от колебаний шатуна?

(б) При каких значениях вынуждающей частоты (по обе стороны от резонанса) амплитуда установившихся колебаний составляет половину амплитуды при резонансе? Какую часть цикла составляет запаздывание по фазе в каждом из этих случаев? Какой из видов энергии в среднем преобладает в каждом случае?

(в) При какой частоте  $\omega$  вынуждающего шатуна амплитуды маховика и шатуна одинаковы? Какую часть периода составляет в этом случае запаздывание маховика от шатуна по фазе?

**1.6\*\* Полуширина резонансной кривой.**

(а) Изучите аналитически и экспериментально зависимость резонансной амплитуды установившихся колебаний от значения добротности  $Q$ . Как полуширина резонансной кривой зависит от добротности осциллятора? (Полушириной резонансной кривой называют интервал частот, в пределах которого амплитуда установившихся колебаний превышает половину ее максимального значения.) Получите приближенную формулу для полуширины, справедливую в случае слабого затухания, т. е. при  $Q \gg 1$ .

(б) Как изменяется положение максимума резонансной кривой по мере увеличения затухания? При каком значении добротности  $Q$  этот максимум смещается к нулевому значению частоты? Иначе говоря, при какой добротности  $Q$  статический эффект вынуждающей силы больше динамического эффекта такой же по величине переменной силы при всех частотах?

### 1.7\*\* Поглощаемая и рассеиваемая мощность.

(а) Докажите аналитически, что при установившихся вынужденных колебаниях энергия, получаемая осциллятором от внешнего источника за период, равна энергии, рассеиваемой осциллятором из-за трения за то же время. Воспользуйтесь выражением (8) для значений амплитуды  $a$  и фазы  $\delta$  установившихся колебаний.

(б) Покажите, что спектральное распределение энергии, поглощаемой осциллятором с высокой добротностью при вынужденных колебаниях, описывается лоренцевской функцией

$$F(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2},$$

где  $\tau = 1/\gamma$ . Выразите полуширину лоренцевского контура через добротность осциллятора.

## 2.2 Переходные процессы

### 2.1\* Начальные условия, при которых переходный процесс не возникает

(а) Для произвольных значений добротности осциллятора, амплитуды и частоты возбуждающего шатуна получите выражения для начального угла отклонения маховика  $\varphi_0 = \varphi(0)$  и его угловой скорости  $\Omega = \dot{\varphi}(0)$  при  $t = 0$ , чтобы синусоидальные вынужденные колебания неизменной амплитуды происходили сразу после включения внешнего воздействия, без переходного процесса.

(б) Приняв  $Q = 5$ ,  $\omega = \omega_0$ , и  $\phi_0 = 15^\circ$ , рассчитайте значения  $\varphi_0$  и  $\Omega$ , при которых не будет переходного процесса. Проверьте свой результат с помощью моделирующего эксперимента на компьютере. Повторите расчет и эксперимент для других значений параметров системы:  $Q = 25$ ,  $\omega = 0.5\omega_0$ ,  $\phi_0 = 15^\circ$  и, скажем, для  $Q = 25$ ,  $\omega = 1.5\omega_0$ ,  $\phi_0 = 15^\circ$ .

### 2.2\* Переходные процессы при резонансе.

Примите следующие значения для параметров осциллятора и вынуждающего воздействия:  $Q = 5$ ,  $\omega = \omega_0$ ,  $\phi_0 = 15^\circ$ , и рассмотрите переходный процесс при нулевых начальных условиях  $\varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0$ .

(а) Рассчитайте промежуток времени (выразив его в единицах периода колебаний), по истечении которого амплитуда маховика достигнет 90% своего установившегося значения. Проверьте свой результат в эксперименте. Обратите внимание на экспоненциальный характер приближения амплитуды к своему значению для установившихся колебаний.

Проанализируйте энергетические превращения в этом процессе, используя графики кинетической, потенциальной и полной энергии. В какие моменты времени полная энергия осциллятора растет наиболее быстро?

(б) Внимательно изучите графики разложения переходного процесса на его простые составляющие (на гармонические установившиеся колебания и затухающие собственные колебания). Обратите особое внимание на экспоненциальное затухание вклада собственных колебаний. Почему начальная амплитуда собственных колебаний совпадает в этом случае с амплитудой установившихся колебаний? Изменится ли это соотношение амплитуд при изменении начальных условий?

(в)\* Принимая во внимание аналитическое выражение (31) для  $\varphi(t)$  соответствующее резонансному случаю ( $\omega = \omega_0$ ), предскажите поведение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости. Проверьте свое предсказание в моделирующем эксперименте.

(г)\* Рассмотрите переходный процесс резонансной раскачки осциллятора в отсутствие трения. По какому закону растет амплитуда в переходном процессе, начинающемся из состояния покоя в положении равновесия? Во сколько раз амплитуда маховика превысит амплитуду шатуна после  $k = 15$  полных циклов колебания шатуна? Сколько периодов внешнего воздействия необходимо для того, чтобы амплитуда маховика в  $n = 20$  раз превысила амплитуду шатуна? Проверьте свои ответы в эксперименте. Что представляет собой проекция фазовой траектории на плоскость  $(\varphi, \dot{\varphi})$  в этом случае? Как располагаются в фазовой плоскости сечения Пуанкаре?

(д)\* Возможно ли уменьшение амплитуды колебаний маховика в отсутствие трения при точной настройке внешнего воздействия в резонанс с собственной частотой осциллятора? Приведите физическое обоснование своему ответу. Подтверждаются ли Ваши заключения в эксперименте?

### 2.3\* Переходные процессы вблизи резонанса.

Исследуйте процесс установления колебаний в окрестности резонанса. Пусть частота внешнего возбуждения равна, например,  $1.2\omega_0$  ( $\omega_0$  — собственная частота осциллятора). Рассмотрите прежде всего поведение системы в отсутствие трения при нулевых начальных условиях.

(а)\* Рассчитайте амплитуду колебаний на собственной частоте  $\omega_0$ , входящих составной частью в переходный процесс (напомним, что в отсутствие трения их амплитуда остается неизменной, и переходный процесс продолжается бесконечно долго). Найдите также амплитуду угловой скорости этих колебаний. Чему равно отношение амплитуды колебаний на собственной частоте к амплитуде установившихся вынужденных колебаний на частоте  $\omega$ ? Проверьте свой расчет, используя опцию «Разложение переходного процесса» в панели управления.

(б) Объясните наблюдаемые графики угловой скорости в процессе биений, используя метод векторных диаграмм для сложения двух синусоидальных колебаний, формирующих биения. Сколько циклов колебаний совершит шатун к моменту, когда амплитуда угловой скорости маховика достигнет максимального значения? Сколько времени проходит между последовательными обращениями амплитуды в нуль? Иными словами, чему равен период таких переходных биений?

(в)\*\* Рассчитайте максимальные значения угловой скорости и угла отклонения во время биений. Чему равно отношение максимальной амплитуды маховика к амплитуде шатуна?

(г)\*\* Обратите внимание на распределение сечений Пуанкаре фазовой траектории для рассматриваемого процесса биений в отсутствие трения. Объясните наблюдаемое распределение.

(д)\*\* Рассмотрите влияние небольшого трения на изучаемый процесс, введя умеренное зна-

чение добротности  $Q$  (20 – 25), оставив без изменения значения всех остальных параметров. Каких изменений в поведении осциллятора следует при этом ожидать? Как изменится распределение сечений Пуанкаре на фазовой плоскости? Проследите поведение сечений Пуанкаре на протяжении всего переходного процесса. Объясните наблюдаемое распределение.

(е)\*\* Слегка измените значение частоты внешнего возбуждения. Пусть, скажем,  $\omega$  будет  $1.19\omega_0$  или  $1.21\omega_0$  вместо прежнего значения  $1.20\omega_0$ . К каким изменениям это приведет в переходном процессе? Какими будут распределения сечений Пуанкаре в фазовой плоскости при таких частотах возбуждения в случае отсутствия трения и при наличии слабого трения? С чем связано изменение наблюдаемой картины по сравнению с исследованным выше случаем  $\omega = 1.2\omega_0$ ?

(ж)\* Предскажите поведение сечений Пуанкаре для вынуждающей частоты  $\omega = 1.25\omega_0$ .

#### 2.4\* Переходные процессы вдали от резонанса.

Пусть частота принудительных колебаний возбуждающего шатуна в четыре раза меньше собственной частоты осциллятора:  $\omega = 0.25\omega_0$ . Будем рассматривать поведение системы при нулевых начальных условиях.

(а) Какими будут колебания маховика в переходном процессе, если трение отсутствует? Рассчитайте для этого случая амплитуды двух налагающихся друг на друга гармонических колебаний, одного на собственной частоте осциллятора  $\omega_0$  и второго на частоте возбуждения  $\omega$ . Чему равны амплитуды соответствующих угловых скоростей?

(б) Пронаблюдайте в эксперименте, какую фазовую траекторию вычерчивает в этом процессе изображающая точка. Объясните форму наблюдаемой фазовой траектории и распределение сечений Пуанкаре.

(в) Введите небольшое трение, выбрав для  $Q$  значение около 15, сохраняя прежними значения всех остальных параметров. Используя опцию «Разложение переходного процесса» в панели управления, наблюдайте изменение формы графиков при постепенном затухании колебаний на собственной частоте. Проследите, как сложная фазовая траектория переходного процесса постепенно трансформируется в эллипс, соответствующий установившимся синусоидальным колебаниям.

(г)\*\* Рассмотрите противоположный случай высокочастотной возбуждающей силы. Например, пусть частота внешнего воздействия будет в четыре раза больше собственной частоты осциллятора:  $\omega = 4\omega_0$ . Выберите нулевые начальные условия и полное отсутствие трения. Чему будет равно отношение амплитуд двух складывающихся колебаний с частотами  $\omega$  и  $\omega_0$ ? Во сколько раз максимальное отклонение маховика, наблюдаемое во время этого переходного процесса, превышает амплитуду установившихся колебаний, входящих составной частью в этот переходный процесс?

(е)\*\* Сравните формы фазовых траекторий и распределения сечений Пуанкаре для последних двух случаев, а именно,  $\omega = 0.25\omega_0$  и  $\omega = 4\omega_0$  в отсутствие трения. Чем объясняется подобие фазовых траекторий для этих случаев?

(д)\* Введите небольшое трение в случае, когда  $\omega = 4\omega_0$ . Проследите, как постепенно устанавливаются высокочастотные синусоидальные вынужденные колебания по мере того, как затухают колебания на собственной частоте. Как в этом случае эволюционирует форма фазовой

траектории? Как ведет себя распределение сечений Пуанкаре в течение рассматриваемого переходного процесса?

(е)\*\* Повторите моделирующий эксперимент при других значениях вынуждающей частоты. Возьмите, например, значения  $\omega = 0.125 \omega_0$ ,  $\omega = 0.5 \omega_0$ ,  $\omega = 1.5 \omega_0$ ,  $\omega = 2 \omega_0$ ,  $\omega = 6 \omega_0$ . Объясните наблюдаемые особенности переходных процессов в этих случаях.

### 2.3 Приложение. Сводка основных формул

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний линейного осциллятора при кинематическом возбуждении:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \omega_0^2\phi_0 \sin \omega t.$$

Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \delta).$$

Амплитуда  $a$  и сдвиг фаз  $\delta$  установившихся вынужденных колебаний:

$$a(\omega) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \tan \delta = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Резонансное значение вынуждающей частоты  $\omega_{\text{res}}$ , при котором амплитуда установившихся колебаний максимальна:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right).$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний при резонансе (для  $\gamma < \sqrt{2}\omega_0$ ) и приближенное выражение для нее, справедливое при  $\gamma \ll \omega_0$ :

$$a_{\text{max}} = \frac{\omega_0^2\phi_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \approx \frac{\omega_0\phi_0}{2\gamma} = Q\phi_0.$$

Здесь добротность  $Q$  — та же самая безразмерная величина  $Q = \omega_0/(2\gamma)$ , которая характеризует затухание собственных колебаний.

Амплитуда  $\Omega$  угловой скорости при установившихся вынужденных колебаниях:

$$\Omega = \omega a(\omega) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + 4\gamma^2}}.$$

Максимальное (резонансное) значение амплитуды угловой скорости  $\Omega_{\text{max}}$  установившихся вынужденных колебаний (при  $\omega = \omega_0$ ):

$$\Omega_{\text{max}} = \omega a(\omega_0) = \frac{\omega_0^2\phi_0}{2\gamma} = \omega_0 Q \phi_0.$$

Спектральная зависимость средней поглощаемой (рассеиваемой) мощности (лоренцевский контур):

$$F(\Delta\omega) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2\tau^2} = \frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2\tau^2}.$$

Начальные условия, при которых не существует переходного процесса (т. е. сразу происходят установившиеся колебания):

$$\varphi_0 = a \sin \delta, \quad \dot{\varphi}(0) = a\omega \cos \delta,$$

где  $a$  и  $\delta$  — амплитуда и сдвиг фаз установившихся колебаний.

Переходный процесс на резонансной частоте при нулевых начальных условиях:

$$\varphi(t) \approx -Q\phi_0(1 - e^{-\gamma t}) \cos \omega_0 t.$$