

# Параметрическое возбуждение линейного осциллятора

## Учебное пособие

Бутиков Е. И.

**Аннотация.** В данном учебном пособии детально описано явление параметрического резонанса, возникающего в результате прямоугольной (кусочно-постоянной) модуляции момента инерции торсионного пружинного осциллятора. Рассматриваются режим параметрической регенерации и условия возникновения параметрического резонанса. Определяются частотные интервалы параметрической неустойчивости. Исследуются стационарные колебания на границах интервалов неустойчивости. Дано описание моделируемой физической системы и приведены теоретические сведения, необходимые студентам для подготовки к лабораторной работе «Параметрическое возбуждение линейного осциллятора».

Вторую часть пособия составляют контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы, а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

## Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретические сведения</b>	<b>2</b>
1.1	О классификации колебаний . . . . .	2
1.2	Моделируемая физическая система . . . . .	3
1.3	Параметрическое возбуждение электромагнитных колебаний . . . . .	5
1.4	Условия параметрического резонанса . . . . .	6
1.5	Порог параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции параметра осциллятора . . . . .	7
1.6	Дифференциальное уравнение параметрических колебаний . . . . .	10
1.7	Частотные интервалы параметрического резонанса . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Контрольные вопросы и задачи</b>	<b>23</b>
2.1	Основной параметрический резонанс . . . . .	23
2.2	Параметрические резонансы и интервалы неустойчивости высоких порядков ( $n > 1$ )	26

# 1 Теоретические сведения

## 1.1 О классификации колебаний

В соответствии с общепринятой классификацией колебаний по способу их возбуждения колебания называют *вынужденными*, если осциллятор подвержен внешнему периодическому воздействию, влияние которого в дифференциальном уравнении осциллятора можно выразить отдельным членом, имеющим вид заданной периодической функции времени. Такие колебания рассматривались в предыдущих главах данного учебного пособия. Более сложен для изучения случай параметрического возбуждения колебаний, когда внешнее воздействие выражается в периодическом изменении (модуляции) какого-либо параметра системы. Пусть, например, при отклонении от положения равновесия возникает восстанавливающая сила  $F = -kx$ , но в отличие от стационарного случая параметр  $k$  в результате какого-либо периодического воздействия изменяется со временем:  $k = k(t)$ . В дифференциальном уравнении такой системы,

$$m\ddot{x} = -k(t)x, \quad (1)$$

коэффициент при  $x$  не постоянен: он явно зависит от времени. Колебания в такой системе существенно отличаются как от собственных колебаний в системе, описываемой уравнением с постоянными коэффициентами, так и от вынужденных колебаний под действием внешней силы, зависящей только от времени.

В случае периодического изменения параметра  $k$ , когда  $k(t+T) = k(t)$ , где  $T$  — период, дифференциальное уравнение (1) называется *уравнением Хилла*. Колебания в системе, описываемой уравнением Хилла, называются параметрически возбуждаемыми или просто *параметрическими*. Когда колебательный процесс, вызываемый периодической модуляцией какого-либо параметра, принимает нарастающий характер, говорят о *параметрическом резонансе*. В случае параметрического резонанса состояние равновесия системы становится неустойчивым и уход из него имеет характер колебаний с прогрессивно растущей амплитудой.

По ряду признаков параметрический резонанс существенно отличается от обычного резонанса, вызываемого прямым силовым воздействием на колебательную систему. Параметрический резонанс наступает при выполнении определенных соотношений между частотой изменения параметра и собственной частотой возбуждаемой системы, отличных от характерного для обычного резонанса соотношения между частотой внешнего воздействия и собственной частотой системы. Параметрический резонанс, в отличие от обычного резонанса, представляет собой *пороговый эффект*, так как при наличии трения он возможен лишь при достаточно большой амплитуде изменения параметра, превосходящей некоторое пороговое значение.

Широко известный пример параметрического резонанса — раскачивание на качелях, когда размах колебаний нарастает при периодических приседаниях и выпрямлениях ног качающегося. Здесь по сути дела происходит периодическое изменение момента инерции (а тем самым и приведенной длины) физического маятника, каковым являются качели вместе с находящимся на них человеком.

Параметрическое возбуждение возможно в любых колебательных системах. Например, в колебательном  $LCR$ -контуре из последовательно соединенных катушки индуктивности, конденсатора и резистора можно возбудить колебания, изменяя емкость конденсатора периодическим сближением и разведением его пластин, либо изменяя индуктивность катушки периодическим вдвиганием и выдвиганием сердечника. Наиболее интенсивные колебания возбуждаются в том случае, когда цикл таких изменений повторяется два раза за один период собственных колебаний в контуре, т. е. когда частота модуляции параметра вдвое превышает собственную частоту системы.

Очевидно, что параметрическое возбуждение возможно лишь при модуляции одного из энергоемких параметров системы (емкости  $C$  или индуктивности  $L$  в случае колебательного контура, жесткости пружины или инертности ротора в случае механического осциллятора). Модуляция сопротивления  $R$  или коэффициента затухания может повлиять лишь на характер затухания колебаний, но не может привести к их нарастанию.

## 1.2 Моделируемая физическая система

В компьютерной программе моделируется параметрическое возбуждение крутильных колебаний механического торсионного пружинного осциллятора. Возбуждение колебаний обеспечивается периодическими изменениями (модуляцией) момента инерции ротора (маховика) пружинного осциллятора. Схематическое изображение торсионного осциллятора показано на рис. 1. Ротор осциллятора представляет собой стержень с двумя одинаковыми грузами, который может поворачиваться вокруг оси, проходящей через его середину. При повороте ротора прикрепленная к нему спиральная пружина создает восстанавливающий момент, пропорциональный углу закручивания. Второй конец пружины закреплен неподвижно. В положении равновесия стержень ротора одним из своих концов указывает на нулевое деление шкалы.

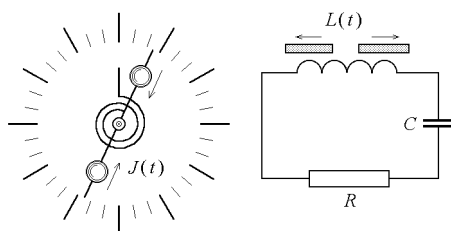


Рис. 1: Схематическое изображение торсионного осциллятора с модулируемым моментом инерции и его электромагнитный аналог — колебательный контур с модулируемой индуктивностью.

Грузы ротора можно одновременно сдвигать вдоль стержня в противоположных направлениях так, что центр масс системы остается на оси вращения. При таком смещении грузов изменяется момент инерции ротора: момент инерции возрастает при раздвигании грузов (при удалении от оси вращения) и убывает при их приближении к оси. Изменение момента инерции ро-

тора приводит к изменению частоты собственных крутильных колебаний осциллятора. Принудительными периодическими перемещениями грузов вдоль стержня туда и обратно создается модуляция момента инерции, необходимая для параметрического возбуждения крутильных колебаний осциллятора. В данной модели предполагается модуляция момента инерции по прямоугольному кусочно-постоянному закону, когда перемещения грузов вдоль стержня происходят скачкообразно. Вызванные смещениями грузов резкие, почти мгновенные увеличения и уменьшения момента инерции происходят поочередно через равные промежутки времени. Обозначим эти промежутки через  $T/2$ , так что  $T$  — это полный период изменений момента инерции (*период модуляции*).

Такие принудительные изменения параметра, описываемые прямоугольной зависимостью от времени, могут вызвать значительное раскачивание ротора при условии, что период модуляции выбран должным образом. Предположим, например, что грузы приближаются к оси ротора в момент, когда ротор проходит через положение равновесия и имеет почти максимальную угловую скорость. При скачкообразном радиальном смещении грузов момент импульса ротора остается прежним. Поэтому результирующее уменьшение момента инерции сопровождается увеличением угловой скорости ротора, и ротор получает дополнительную энергию. Чем больше была угловая скорость ротора, тем значительнее возрастание его кинетической энергии. Эта дополнительная энергия поставляется источником, вызывающим модуляцию параметра, т. е. принудительные радиальные перемещения грузов вдоль стержня.

С другой стороны, когда грузы мгновенно раздвигаются в стороны от оси вращающегося ротора, угловая скорость вращения ротора и его кинетическая энергия уменьшаются. При этом энергия передается назад от ротора источнику модуляции. Чтобы приращения энергии происходили регулярно и в целом превышали энергию, возвращаемую источнику, систематически «подпитывая» ротор энергией, период и фаза модуляции момента инерции должны удовлетворять определенным условиям.

Пусть, например, грузы сдвигаются к оси вращения и затем раздвигаются в прежние положения дважды на протяжении одного среднего периода собственных колебаний. Пусть также грузы придвигаются к оси вращения в моменты, когда угловая скорость ротора максимальна. Тогда их возвращение в прежние положения придется на момент почти максимального отклонения от равновесия, когда угловая скорость ротора близка к нулю. Такие фазовые соотношения выполняются для колебаний, графики которых показаны на рис. 2.

Напомним, что угловая скорость ротора возрастает при сближении грузов и убывает при их раздвижении, и эти изменения скорости пропорциональны самой скорости. Но поскольку в момент раздвижения грузов угловая скорость ротора близка к нулю, такое раздвижение не вызывает практически никакого изменения угловой скорости и кинетической энергии ротора. Таким образом, модуляция момента инерции с периодом, вдвое меньшим собственного среднего периода осциллятора, приводит к максимально возможному росту амплитуды при условии, что фаза модуляции выбрана так, как описано выше.

Очевидно, что эффективный рост энергии осциллятора возможен не только тогда, когда два полных цикла изменения параметра происходят на протяжении одного периода собственных колебаний, но также когда два цикла модуляции происходят на протяжении трех, пяти или другого

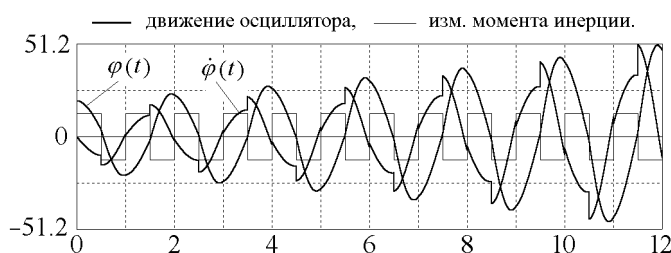


Рис. 2: Графики угла отклонения и угловой скорости при параметрическом возбуждении колебаний модуляцией момента инерции по кусочно-постоянному закону.

нечетного числа периодов собственных колебаний.

Ниже будет показано, что возрастание энергии осциллятора, хотя и менее значительное, может происходить и тогда, когда два цикла модуляции параметра происходят на протяжении четного числа периодов собственных колебаний.

Если принудительные изменения параметра совершаются с указанной выше периодичностью, но не скачкообразно, их влияние на осциллятор качественно оказывается аналогичным, хотя эффективность вложения энергии (при той же амплитуде модуляции параметра) максимальна при модуляции по прямоугольному закону, потому что именно такой закон модуляции может обеспечить наиболее оптимальные условия передачи энергии осциллятору. Случай плавной (синусоидальной) модуляции параметра важен для практических приложений. Он моделируется в другой программе комплекса.

### 1.3 Параметрическое возбуждение электромагнитных колебаний

Параметрическое возбуждение колебаний возможно в самых разных колебательных системах. Например, электромагнитные колебания в последовательной цепи  $LCR$ -цепи, содержащей катушку индуктивности, конденсатор и резистор (см. рис. 1 на стр. 3), можно возбудить периодическими изменениями емкости конденсатора, если с должной периодичностью сдвигать и раздвигать его пластины, или изменениями индуктивности катушки, если периодически вдвигать и выдвигать сердечник катушки.

Такие периодические изменения индуктивности катушки аналогичны изменениям момента инерции ротора механического осциллятора, модель которого описана выше. Наиболее сильные колебания возбуждаются при условии, что два цикла модуляции индуктивности совершаются на протяжении одного периода собственных электромагнитных колебаний в контуре. Очевидно, что параметрическое возбуждение возможно лишь тогда, когда в контуре уже происходят хотя бы слабые собственные колебания.

Параметрическое возбуждение возможно лишь при модуляции одного из энергоемких параметров,  $C$  или  $L$ . Модуляция сопротивления  $R$ , как и коэффициента затухания  $\gamma$  в механической

системе, может повлиять лишь на характер затухания колебаний, но не может вызвать роста их амплитуды.

## 1.4 Условия параметрического резонанса

Существует несколько важных различий между параметрическим резонансом и обычным резонансом, возникающим под действием периодической внешней силы, приложенной непосредственно к осциллятору. При параметрическом резонансе рост амплитуды и, следовательно, энергии колебаний обеспечивается работой сил, которые периодически изменяют параметр возбуждаемой системы. Максимальное вложение энергии в систему обеспечивается при условии, что два цикла изменения параметра происходят на протяжении одного периода собственных колебаний. Но вложение энергии, хотя и менее эффективное, возможно, когда два цикла модуляции происходят за два, за три и вообще за целое число собственных периодов. Иными словами, параметрический резонанс возможен, когда частота  $\omega$  (или период  $T$ ) модуляции параметра удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\omega = 2\omega_0/n, \quad T = nT_0/2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

При небольшой глубине модуляции период параметрически возбуждаемых колебаний во всех случаях (т. е. для резонанса любого порядка  $n$ ) близок к периоду собственных колебаний.

Чем выше порядок  $n$  резонанса, тем меньшая (в общем случае) энергия сообщается колебательной системе за период параметрических колебаний при заданной глубине модуляции.

Одна из наиболее интересных особенностей параметрического резонанса заключается в том, что возбуждение нарастающих колебаний возможно не только при частотах модуляции  $\omega_n$ , выражаемых соотношениями (2), но также и в конечных интервалах частот, лежащих по обе стороны от значений  $\omega_n$  (в интервалах параметрической неустойчивости). Эти интервалы становятся шире по мере увеличения глубины (амплитуды) модуляции параметра.

Важное отличие параметрического резонанса от обычного резонанса при вынужденных колебаниях относится к зависимости скорости роста энергии от уже запасенной осциллятором энергии. Если при вынужденных колебаниях работа внешней силы, а тем самым и приращение энергии за период пропорциональны *амплитуде* колебаний, т. е. квадратному корню из запасенной энергии, то при параметрическом резонансе приращение энергии за период пропорционально самой *энергии*, запасенной осциллятором.

Потери энергии из-за трения, неизбежные в любой реальной системе, также пропорциональны энергии, запасенной системой. В случае вынужденных колебаний сколь угодно малая внешняя сила вызывает резонанс. Однако потери энергии из-за трения ограничивают рост амплитуды при резонансе, потому что с увеличением запасенной энергии эти потери растут быстрее, чем вложения энергии за счет работы внешней силы, раскачивающей систему. В случае параметрического резонанса как вложения энергии за счет модуляции параметра, так и потери энергии из-за трения пропорциональны запасенной энергии (квадрату амплитуды колебаний), так что их отношение не зависит от амплитуды. Поэтому параметрический резонанс возможен лишь тогда,

когда превзойден некоторый *порог*, т. е. когда вложение энергии за период, вызванное модуляцией параметра, превосходит энергию, рассеиваемую из-за трения за то же время. Чтобы это условие выполнялось, глубина модуляции (амплитуда изменения параметра) должна превосходить некоторое критическое значение. Это критическое (пороговое) значение зависит от трения. Когда же порог превышен, трение не в состоянии ограничить рост амплитуды. В идеализированной линейной системе амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний должна расти неограниченно.

В нелинейной системе период собственных колебаний зависит от амплитуды. Если условия параметрического резонанса выполнены при малых колебаниях, и амплитуда начинает возрастать, то по мере роста амплитуды условия резонанса все сильнее нарушаются: изменение собственной частоты выводит систему из резонанса. В реальных системах рост амплитуды при параметрическом резонансе ограничен нелинейными эффектами.

Ниже мы рассмотрим более строгий математический подход к описанию параметрического резонанса, вызываемого кусочно-постоянной модуляцией параметра по прямоугольному закону.

## 1.5 Порог параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции параметра осциллятора

Для оценки глубины модуляции, соответствующей порогу параметрического возбуждения, можно воспользоваться соображениями, основанными на законе сохранения энергии. Прежде всего рассчитаем приращение кинетической энергии ротора, происходящее при скачкообразном смещении грузов в направлении оси вращения, когда момент инерции ротора уменьшается от значения  $J_1 = J_0(1 + m)$  до  $J_2 = J_0(1 - m)$ . Ограничимся случаем малых значений глубины модуляции  $m$  ( $m \ll 1$ ). При радиальном смещении грузов момент импульса ротора  $L = J\omega = J\dot{\varphi}$  остается неизменным:  $J_1\dot{\varphi}_1 = J_2\dot{\varphi}_2$ , откуда для отношения угловых скоростей до и после изменения момента инерции получаем  $\dot{\varphi}_2/\dot{\varphi}_1 = J_1/J_2 = (1 + m)/(1 - m)$ . Для происходящего при этом приращения  $\Delta E$  кинетической энергии ротора  $E_{\text{kin}} = J\dot{\varphi}^2/2 = L^2/2J$  можно написать:

$$\Delta E = \frac{L^2}{2J_0} \left( \frac{1}{1 - m} - \frac{1}{1 + m} \right) \approx 2mE_{\text{kin}} \quad (\text{для } m \ll 1). \quad (3)$$

Когда такое событие происходит вблизи положения равновесия ротора, т. е. в момент, когда полная энергия осциллятора  $E$  практически совпадает с кинетической энергией ротора  $E_{\text{kin}}$ , из выражения (3) следует, что относительное приращение полной энергии  $\Delta E/E$  при однократном сближении грузов примерно равно удвоенному значению глубины модуляции  $m$ :  $\Delta E/E \approx 2m$ .

Если период и фаза модуляции имеют те значения, что наиболее благоприятны для эффективной передачи энергии осциллятору, скачкообразное смещение грузов назад к концам стержня происходит в тот момент, когда ротор находится в положении наибольшего отклонения (точнее, очень близок к этому положению). В этот момент угловая скорость и кинетическая энергия ротора имеют почти нулевые значения, и поэтому обратное радиальное смещение грузов в прежние положения к концам стержня почти не приводит к уменьшению энергии осциллятора.

В случае основного параметрического резонанса (резонанса 1-го порядка  $n = 1$ ) вложение энергии происходит дважды на протяжении одного периода  $T_0$  собственных колебаний. Таким образом, относительное приращение энергии  $\Delta E/E$  за один период колебаний составляет приблизительно  $4m$ . Процесс, в котором приращение энергии  $\Delta E$  за период пропорционально запасенной энергии  $E$  ( $\Delta E \approx 4mE$ ), характеризуется экспоненциальным ростом энергии со временем:

$$E(t) = E_0 \exp(\alpha t). \quad (4)$$

В данном случае показатель роста  $\alpha$  пропорционален глубине модуляции  $m$  момента инерции:  $\alpha = 4m/T_0$ . В условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс ( $T = T_0/2$ ) уменьшение энергии осциллятора происходит главным образом из-за трения. Рассеяние энергии при линейном (пропорциональном скорости) трении дается следующим выражением:

$$E(t) = E_0 \exp(-2\gamma t). \quad (5)$$

Для относительного уменьшения  $\Delta E/E$  механической энергии из-за трения за промежутки времени, равный целому числу периодов колебаний, выражение (5) дает  $\Delta E/E \approx -2\gamma t$ . Приравнявая найденное выше относительное увеличение энергии  $4m$  за период, вызванное прямоугольной модуляцией момента инерции, относительному уменьшению энергии из-за трения  $2\gamma T_0$ , получаем следующее пороговое (минимальное) значение  $m_{\min}$  глубины модуляции, соответствующее основному ( $n = 1$ ) параметрическому резонансу:

$$m_{\min} = \gamma T_0/2 = \pi/(2Q). \quad (6)$$

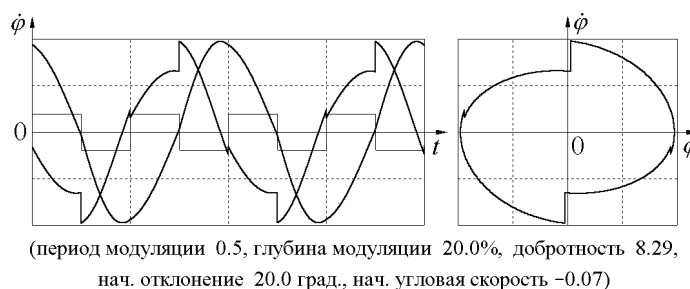


Рис. 3: Графики и фазовая траектория стационарных колебаний в условиях порога  $m = \pi/2Q$  при  $T \approx T_0/2$ .

График угловой скорости и фазовая траектория колебаний, происходящих в условиях порога параметрического возбуждения, приведены на рис. (3). Такой режим стационарных колебаний, амплитуда которых остается неизменной несмотря на диссипацию энергии, называется *параметрической регенерацией*. Стационарный характер колебаний оказывается возможным благодаря тому, что потери энергии из-за трения в среднем компенсируются поступлением энергии



от источника, который приводит в движение грузы вдоль стержня, обеспечивая периодическую модуляцию момента инерции ротора.

Для резонанса третьего порядка, когда  $T = 3T_0/2$ , пороговое значение глубины модуляции в три раза больше, чем для основного резонанса:  $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$ . В этом случае два цикла модуляции параметра совершаются на протяжении трех полных периодов собственных колебаний. Радиальные перемещения грузов вдоль стержня ротора здесь также происходят в моменты, наиболее благоприятные для передачи энергии осциллятору, поэтому то же самое вложение энергии происходит в течение втрое большего интервала времени, чем в случае основного резонанса.

Если глубина модуляции превосходит пороговое значение, энергия осциллятора растет со временем экспоненциально. Рост энергии и здесь описывается уравнением (4). Однако теперь показатель скорости роста энергии  $\alpha$  определяется превышением энергии, сообщаемой осциллятору благодаря модуляции параметра, над потерями энергии из-за трения за то же время:  $\alpha = 4m/T_0 - 2\gamma$ . Энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому амплитуда параметрически возбуждаемых колебаний тоже экспоненциально растет со временем:  $a(t) = a_0 \exp(\beta t)$ . Показатель  $\beta$  скорости роста амплитуды равен половине показателя скорости роста энергии. В условиях основного резонанса, когда вложения энергии происходят дважды на протяжении периода собственных колебаний, для показателя скорости роста амплитуды получаем  $\beta = 2m/T_0 - \gamma = m\omega_0/\pi - \gamma$ .

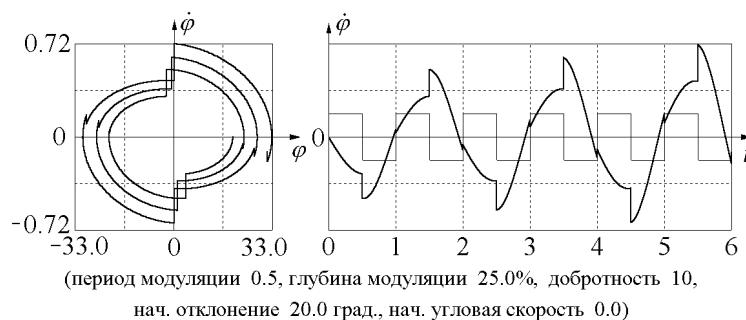


Рис. 4: Экспоненциальный рост амплитуды колебаний в условиях основного параметрического резонанса ( $n = 1$ ).

Графики экспоненциального роста колебаний в условиях основного резонанса показаны на рис. 2 на стр. 5, а также на рис. 4 вместе с фазовой траекторией. Затухающим собственным колебаниям на интервалах постоянства момента инерции соответствуют участки фазовой траектории в виде отрезков спиралей, скручивающихся к фокусу. Вертикальные сегменты соответствуют скачкообразным изменениям угловой скорости в моменты радиальных смещений грузов ротора. В совокупности образуется раскручивающаяся фазовая траектория, соответствующая нарастающим колебаниям.

## 1.6 Дифференциальное уравнение параметрических колебаний

Допустим, что периодические изменения момента инерции ротора  $J$  происходят по прямоугольному кусочно-постоянному закону. Пусть максимальное и минимальное значения момента инерции равны соответственно  $J_1 = J_0(1 + m)$  и  $J_2 = J_0(1 - m)$ , где  $J_0$  — значение момента инерции при некотором среднем положении грузов на стержне, а  $m$  — глубина модуляции. На протяжении интервалов времени  $(0, T/2)$  и  $(T/2, T)$  значение момента инерции постоянно, и движение ротора может рассматриваться как свободное колебание, описываемое линейным дифференциальным уравнением. Однако коэффициенты в этом уравнении различны для соседних интервалов времени  $(0, T/2)$  и  $(T/2, T)$ :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1+m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot{\varphi}) \quad \text{для } 0 < t < T/2, \quad (7)$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{1-m}(\omega_0^2\varphi + 2\gamma\dot{\varphi}) \quad \text{для } T/2 < t < T. \quad (8)$$

Здесь  $\omega_0 = \sqrt{D/J_0}$  — собственная частота осциллятора, а  $\gamma$  — постоянная затухания, характеризующая интенсивность вязкого трения в системе. Обе эти величины относятся к среднему значению момента инерции  $J_0 = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)$ . Для малых и умеренных значений  $m$  момент инерции равен  $J_0$ , когда грузы находятся приблизительно на полпути между их крайними положениями на стержне ротора. При больших  $m$  это не так, потому что момент инерции определяется квадратом расстояния грузов от оси вращения ротора.

В моделирующей компьютерной программе в реальном масштабе времени выполняется численное интегрирование уравнений (7) — (8), описывающих движение ротора осциллятора на соседних промежутках времени  $(0, T/2)$ ,  $(T/2, T)$ ,  $(T, 3T/2)$ , и т.д.

Для интервалов постоянства момента инерции дифференциальные уравнения (7) — (8) линейны и имеют точные аналитические решения. Развиваемый ниже теоретический подход опирается на «сшивание» этих решений в моменты скачкообразных изменений параметра, когда мы должны совершить переход от одного из этих линейных уравнений к другому. Уравнения (7) — (8) сменяют друг друга в моменты времени  $t = nT/2$ , где  $n = 1, 2, \dots$

Начальные условия для каждого промежутка выбираются в соответствии с принятой физической моделью следующим образом. Каждое начальное значение угла отклонения  $\varphi$  берется равным углу  $\varphi(t)$ , достигнутому ротором к концу предшествующего промежутка времени. Начальная угловая скорость  $\dot{\varphi}$  связана с угловой скоростью в конце предыдущего интервала времени законом сохранения момента импульса:

$$(1 + m)\dot{\varphi}_1 = (1 - m)\dot{\varphi}_2. \quad (9)$$

В уравнении (9)  $\dot{\varphi}_1$  — угловая скорость в конце предшествующего интервала времени, на протяжении которого момент инерции ротора был равен  $J_1 = J_0(1 + m)$ , а  $\dot{\varphi}_2$  — начальное значение для следующего интервала, на протяжении которого момент инерции равен  $J_2 = J_0(1 - m)$ .

Изменение угловой скорости при следующем скачкообразном изменении момента инерции от значения  $J_2$  до  $J_1$  можно рассчитать точно так же.

Применение закона сохранения импульса для нахождения выражаемой формулой (9) связи угловой скорости до и после изменения момента инерции здесь допустимо, несмотря на то, что вращение маховика, строго говоря, не является свободным: на него действует момент силы упругости пружины. Действительно, влиянием пружины можно пренебречь, если перемещение грузов вдоль стержня ротора происходит за время, значительно меньшее периода собственных колебаний. В принятой модели физической системы предполагается, что это перемещение грузов происходит мгновенно.

На протяжении каждой половины периода модуляции  $T/2$  вращение ротора осциллятора описывается линейным дифференциальным уравнением (7) или (8). Таким образом, это движение представляет собой отрезок некоторого гармонического или затухающего колебания. График такого движения на отдельном интервале постоянства момента инерции — это отрезок синусоиды (или затухающей синусоиды). Аналитическое исследование параметрического возбуждения колебаний при кусочно-постоянной модуляции параметра можно выполнять «сшиванием» («припасовкой» по выражению академика Л.И.Мандельштама) известных решений линейных уравнений для последовательных интервалов времени.

Обычно аналитическое исследование проблемы параметрического резонанса ограничивается определением интервалов частоты модуляции  $\omega$  при заданной глубине модуляции  $m$ , в пределах которых состояние покоя в положении равновесия становится неустойчивым. В таких *интервалах неустойчивости* любого сколь угодно малого отклонения от состояния покоя достаточно для того, чтобы колебания нарастали прогрессивно со временем. Задача состоит в том, чтобы для любого заданного значения глубины модуляции  $m$  определить те интервалы частоты модуляции  $\omega$  в окрестности значений  $\omega_n = 2\omega_0/n$ , в пределах которых возможен параметрический резонанс, т. е. колебания с нарастающей амплитудой. Границы этих интервалов можно находить как те частоты модуляции, при которых существуют стационарные решения уравнений (7) — (8), описывающие колебания неизменной амплитуды.

## 1.7 Частотные интервалы параметрического резонанса

Порог параметрического возбуждения был найден выше для условий основного резонанса, когда два цикла принудительной модуляции параметра совершаются на протяжении одного периода собственных колебаний осциллятора. Полученная оценка (6) справедлива для малых значений глубины модуляции  $m$ .

При больших значениях глубины модуляции  $m$  само понятие периода собственных колебаний осциллятора требует уточнения. Пусть  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J_0/D}$  — период колебаний ротора, когда грузы на нем закреплены в средних положениях. Соответствующий этим положениям грузов момент инерции ротора равен  $J_0 = \frac{1}{2}(J_{\max} + J_{\min})$ . Период собственных колебаний  $T_1$  будет немного больше, когда грузы смещены дальше от оси вращения:  $T_1 = T_0\sqrt{1+m} \approx T_0(1+m/2)$ . Период будет меньше, когда грузы придвинуты ближе к оси вращения:  $T_2 = T_0\sqrt{1-m} \approx T_0(1-m/2)$ .

$m/2$ ). Для дальнейших применений будет удобнее определить средний период  $T_{\text{av}}$  не как арифметическое среднее  $\frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ , а скорее как период, соответствующий средней частоте  $\omega_{\text{av}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ , где  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  и  $\omega_2 = 2\pi/T_2$ . Таким образом, для заданного значения глубины модуляции средним периодом будем называть следующую величину:

$$T_{\text{av}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{av}}} = \frac{2T_1T_2}{(T_1 + T_2)}. \quad (10)$$

Вследствие зависимости среднего периода собственных колебаний от глубины модуляции, значение периода  $T$  модуляции параметра, соответствующее точной настройке на какой-либо из параметрических резонансов, оказывается зависящим не только от порядка  $n$  резонанса, но и от глубины модуляции  $m$ . В самом деле, для выполнения условий резонанса, приращение фазы собственных колебаний на протяжении одного цикла модуляции должно быть равно  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \dots$ . В течение первого полуцикла модуляции фаза получает приращение  $\omega_1 T/2$ , а в течение второго полуцикла — приращение  $\omega_2 T/2$ . Следовательно, вместо приближенного условия настройки на резонанс (2) мы получаем:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} T = n\pi, \quad \text{или} \quad T = n \frac{\pi}{\omega_{\text{av}}} = n \frac{T_{\text{av}}}{2}. \quad (11)$$

Таким образом, условие точной настройки на резонанс определенного порядка  $n$  выражается через значения двух периодов собственных колебаний  $T_1$  и  $T_2$ . Это условие имеет вид  $T = nT_{\text{av}}/2$ , где  $T_{\text{av}}$  определяется выражением (10).

Для малых и умеренных значений  $m$  можно пользоваться приближенными выражениями для средних значений частоты и периода:

$$\omega_{\text{av}} = \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1+m}} + \frac{1}{\sqrt{1-m}} \right) \approx \omega_0 \left( 1 + \frac{3}{8}m^2 \right),$$

$$T_{\text{av}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{av}}} \approx T_0 \left( 1 - \frac{3}{8}m^2 \right).$$

Различие между  $T_{\text{av}}$  и  $T_0$  проявляется лишь в членах, пропорциональных квадрату глубины модуляции  $m$ .

Бесконечный рост амплитуды при параметрическом возбуждении возможен не только в случаях точной настройки на какой-либо из резонансов, но и в некоторых интервалах значений периода модуляции. Эти *интервалы параметрического резонанса* содержат в себе значения  $T = T_{\text{av}}/2, T = T_{\text{av}}, T = 3T_{\text{av}}/2, \dots$ , соответствующие точной настройке на резонансы. Ширина интервалов возрастает с увеличением глубины модуляции  $m$ .<sup>1</sup> Вне этих интервалов положение равновесия торсионного осциллятора устойчиво, т. е. при модуляции момента инерции амплитуда колебаний не нарастает.

<sup>1</sup>Строго говоря, для резонансов высоких порядков ( $n > 2$ ) последнее утверждение справедливо только при малых и умеренных значениях глубины модуляции (см. рис. 11 на стр. 21, на котором изображена диаграмма интервалов параметрического резонанса).

Чтобы определить границы частотных интервалов параметрической неустойчивости, можно рассмотреть стационарные колебания неизменной амплитуды, которые могут происходить, когда период модуляции  $T$  совпадает с одной из этих границ. Такие стационарные колебания можно представить как чередование свободных (собственных) колебаний с периодами  $T_1$  и  $T_2$ . В отсутствие трения графики таких колебаний образованы сегментами незатухающих синусоидальных кривых соответствующих периодов.

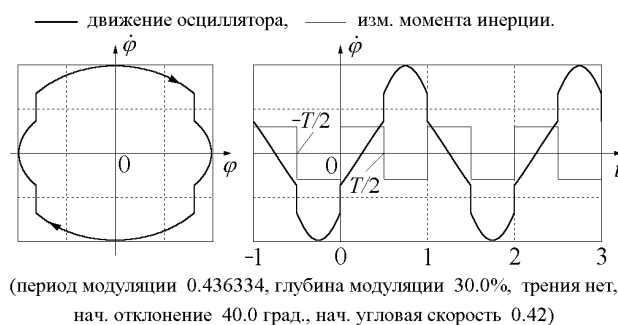


Рис. 5: Стационарные параметрические колебания на нижней границе основного интервала неустойчивости (вблизи  $T = T_{av}/2$ ).

Рассмотрим сначала окрестность основного резонанса с  $T = T_{av}/2$ . Предположим, что период  $T$  модуляции параметра немного короче резонансного значения  $T = T_{av}/2$ , так что он соответствует левой границе основного интервала неустойчивости. В этом случае промежуток постоянства момента инерции длится менее четверти среднего периода  $T_{av}$  собственных колебаний, и поэтому чуть меньше четверти собственного колебания успевает совершиться за это время. Фазовая траектория и график угловой скорости такого периодического процесса имеют характерный вид, показанный на рис. 5. Участки графика скорости на интервалах постоянства момента инерции представляют собой чередующиеся отрезки синусоидальных кривых с периодами  $T_1$  и  $T_2$ . Эти отрезки синусоид симметрично усечены с двух сторон на краях интервалов.

Чтобы найти условия, при которых возможны такие стационарные колебания, можно написать выражения для  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  на соседних интервалах, и затем потребовать, чтобы эти выражения должным образом сшивались на границах интервалов.

Примем для простоты за начало отсчета времени  $t = 0$  момент, когда грузы скачкообразно раздвигаются в стороны от оси. В этот момент угловая скорость ротора скачком уменьшается по модулю (см. рис. 5). Затем в течение промежутка времени  $(0, T/2)$  момент инерции постоянен и график соответствует собственному колебанию с частотой  $\omega_1 = \omega_0/\sqrt{1+m}$ . Это движение удобно представить как суперпозицию синусоидальной и косинусоидальной функций с постоянными амплитудами  $A_1$  и  $B_1$ :

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t, \\ \dot{\varphi}_1(t) &= A_1 \omega_1 \cos \omega_1 t - B_1 \omega_1 \sin \omega_1 t.\end{aligned}\quad (12)$$

Аналогично, в течение промежутка  $(-T/2, 0)$  график на рис. 5 представляет собой отрезок синусоидального колебания с частотой  $\omega_2 = \omega_0/\sqrt{1-m}$ :

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t, \\ \dot{\varphi}_2(t) &= A_2 \omega_2 \cos \omega_2 t - B_2 \omega_2 \sin \omega_2 t.\end{aligned}\quad (13)$$

Для определения значений постоянных  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$  можно воспользоваться условиями, которые должны выполняться при «сшивании» графиков для получения периодического процесса.

При  $t = 0$  угол отклонения одинаков как для  $\varphi_1$ , так и для  $\varphi_2$ :  $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ . Из этого условия находим, что  $B_1 = B_2$ . Будем в дальнейшем обозначать эти совпадающие постоянные просто как  $B$ . Угловая скорость в момент  $t = 0$  изменяется скачком:

$$(1+m)\dot{\varphi}_1(0) = (1-m)\dot{\varphi}_2(0).$$

Это условие дает следующее соотношение между  $A_2$  и  $A_1$ :  $A_2 = kA_1 = kA$ , где введена безразмерная величина  $k$ , следующим образом зависящая от глубины модуляции  $m$ :

$$k = \sqrt{\frac{1+m}{1-m}}.$$

Уравнения для нахождения постоянных  $A$  и  $B$  получаются из условий сшивания в моменты  $-T/2$  и  $T/2$ . В случае стационарных периодических колебаний, соответствующих основному резонансу (и всем резонансам нечетных порядков  $n = 1, 3, \dots$  в выражении (11)), эти условия таковы:

$$\varphi_1(T/2) = -\varphi_2(-T/2), \quad (1+m)\dot{\varphi}_1(T/2) = -(1-m)\dot{\varphi}_2(-T/2).\quad (14)$$

Подставляя  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$  из выражения (13) в (14), получаем систему двух однородных уравнений для неизвестных  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned}(S_1 - kS_2)A + (C_1 + C_2)B &= 0, \\ k(C_1 + C_2)A - (kS_1 - S_2)B &= 0.\end{aligned}\quad (15)$$

В уравнениях (15) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_1 &= \cos(\omega_1 T/2), & C_2 &= \cos(\omega_2 T/2), \\ S_1 &= \sin(\omega_1 T/2), & S_2 &= \sin(\omega_2 T/2). \end{aligned} \quad (16)$$

Система (15) однородных уравнений для  $A$  и  $B$  имеет нетривиальное (ненулевое) решение только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$2kC_1C_2 - (1 + k^2)S_1S_2 + 2k = 0. \quad (17)$$

Это условие существования ненулевого решения системы (15) дает уравнение для нахождения неизвестной переменной  $T$ , входящей в (17) через аргументы синусоидальных и косинусоидальных функций в  $S_1$ ,  $S_2$  и  $C_1$ ,  $C_2$ . Это уравнение и определяет искомые границы интервала неустойчивости. Нижняя и верхняя границы интервала  $T_-$  и  $T_+$  даются корнями этого уравнения.

Чтобы найти приближенное решение этого трансцендентного уравнения (17), преобразуем его к более удобной форме. Сначала представим входящие в него произведения косинусов и синусов  $C_1C_2$  и  $S_1S_2$  следующим образом:

$$C_1C_2 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\Delta\omega T}{2} + \cos \omega_{av}T), \quad S_1S_2 = \frac{1}{2}(\cos \frac{\Delta\omega T}{2} - \cos \omega_{av}T),$$

где  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . Затем, используя тождество  $\cos \alpha = 2 \cos^2(\alpha/2) - 1$ , приведем (17) к следующему виду:

$$(1 + k) \cos \frac{\omega_{av}T}{2} = \pm |1 - k| \cos \frac{\Delta\omega T}{4}. \quad (18)$$

Для границ интервала неустойчивости, содержащего основной резонанс, нужно искать решение уравнения (18) для неизвестного  $T$  в окрестности  $T = T_0/2$ . При заданном значении глубины модуляции  $m$  уравнение (18) имеет два решения в окрестности  $T_0/2 \approx T_{av}/2$ , которые соответствуют нижней (см. рис. 5) и верхней границам  $T_-$  и  $T_+$  интервала неустойчивости. Фазовая диаграмма и график угловой скорости для стационарных колебаний на верхней границе интервала показаны на рис. 6.

Чтобы найти границы  $T_-$  и  $T_+$  интервала неустойчивости, представим искомый период  $T$  в аргументе косинуса в левой части уравнения (18) в виде  $T_{av}/2 + \Delta T$ , где  $\Delta T \ll T_0$ . Поскольку  $\omega_{av}T_{av} = 2\pi$ , можно переписать этот косинус как  $-\sin(\omega_{av}\Delta T/2)$ . Тогда уравнение (18) для неизвестного  $\Delta T$  принимает вид:

$$\sin \frac{\omega_{av}\Delta T}{2} = \mp \frac{|1 - k|}{1 + k} \cos \frac{\Delta\omega(T_{av}/2 + \Delta T)}{4}. \quad (19)$$

В компьютерной программе это уравнение для  $\Delta T$  решается численно методом итераций. Мы начинаем с  $\Delta T = 0$  в качестве приближения нулевого порядка, подставляя это значение в правую часть (19), взятую, скажем, с верхним знаком. Тогда левая часть (19) дает нам значение  $\Delta T$  в первом приближении. Подставляя это значение первого приближения в правую часть (19), в

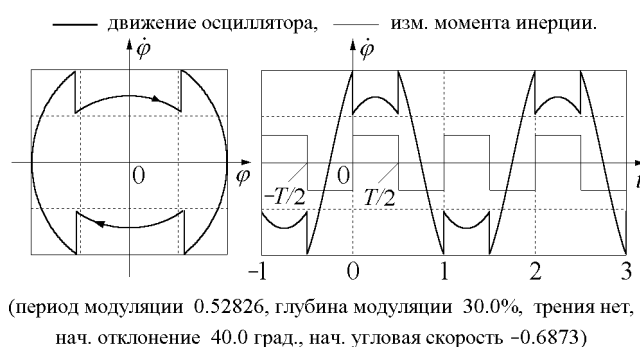


Рис. 6: Стационарные параметрические колебания на верхней границе основного интервала неустойчивости (вблизи  $T = T_{av}/2$ ).

левой части получаем значение  $\Delta T$  во втором приближении. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет получено самосогласованное значение  $\Delta T$  для левой границы искомого интервала. Чтобы получить значение  $\Delta T$  для его правой границы, используется та же процедура итераций для уравнения (19) с нижним знаком в его правой части. Полученные таким образом значения периода модуляции, соответствующие границам интервала неустойчивости при заданном значении глубины модуляции  $m$ , выводятся на экран, когда открыта панель «Ввод данных». Если Вы изменили  $m$ , для получения новых значений границ интервала неустойчивости достаточно нажать кнопку «Обновить информацию».

После подстановки одного из корней  $T_-$  или  $T_+$  уравнения (19) в систему (15) оба ее уравнения для нахождения  $A$  и  $B$  становятся эквивалентными и позволяют найти только отношение  $A/B$ . Это означает, что амплитуда стационарных колебаний на границе интервала неустойчивости может иметь любое значение. Это значение зависит от начальных условий. Но форма колебаний на границах интервала однозначно определяется отношением амплитуд  $A$  и  $B$  синусоидальной и косинусоидальной функций, чередующиеся отрезки графиков которых образуют характерный профиль стационарных параметрических колебаний (см. рисунки 5 и 6).

Чтобы получить приближенное аналитическое решение уравнения (19), справедливое для малых значений глубины модуляции  $m$ , можно упростить выражение в его правой части, полагая  $k \approx 1 + m$ ,  $|1 - k| \approx m$ . Можно также значение косинуса принять равным 1. В левой части уравнения (19), где  $\omega_{av} = 2\pi/T_{av}$ , можно заменить синус его малым аргументом. В результате получается следующее приближенное выражение, справедливое с точностью до членов второго порядка по малому параметру  $m$ :

$$T_{\mp} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{m}{\pi} \right) T_{av}. \quad (20)$$

Поскольку в компьютерной программе в качестве естественной единицы времени для ввода периода модуляции  $T$  используется период собственных колебаний  $T_0 = 2\pi\sqrt{D/J_0}$  (соответствующий среднему значению момента инерции  $J_0$ ), удобно выразить эти приближенные значе-



ния  $T_{\mp}$  для границ интервала неустойчивости через  $T_0$ :

$$T_{\mp} = \frac{1}{2} \left( 1 \mp \frac{m}{\pi} - \frac{3m^2}{8} \right) T_0. \quad (21)$$

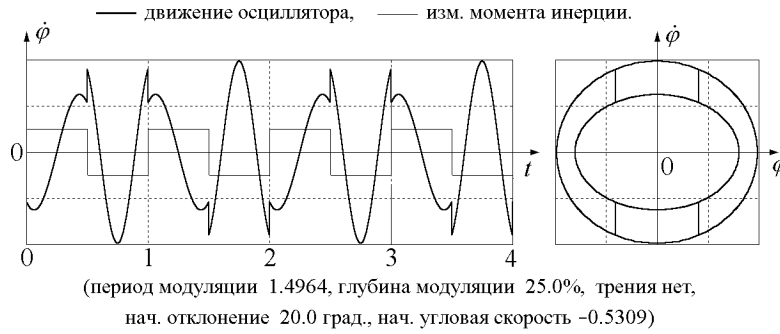


Рис. 7: Стационарные параметрические колебания на границе интервала неустойчивости вблизи  $T = 3T_{av}/2$ .

Аналогично можно рассчитать границы интервала неустойчивости в окрестности резонанса третьего порядка  $n = 3$ , когда два полных цикла модуляции параметра совершаются на протяжении трех периодов собственных колебаний ( $T = 3T_{av}/2$ ). Рассматривая стационарные колебания на границах этого интервала (рис. 7), мы приходим к тем же уравнениям (15) для  $A$  и  $B$ , и к уравнению (18) для значений периода модуляции, соответствующих границам интервала. Однако теперь нужно искать решение (15) в окрестности  $T = 3T_{av}/2$ . Границы этого интервала, полученные численным решением уравнения (18) для заданного значения  $m$ , также выводятся на экран, когда открыта панель «Ввод данных». При малых значениях глубины модуляции  $m$  можно получить приближенные выражения для нижней и верхней границ этого интервала, справедливые с точностью до квадратичных по  $m$  членов:

$$T_{\mp} = \left( \frac{3}{2} \mp \frac{m}{2\pi} \right) T_{av}. \quad (22)$$

Через период собственных колебаний  $T_0$  (при  $J = J_0$ ) эти границы выражаются следующим образом:

$$T_{\mp} = \left( \frac{3}{2} \mp \frac{m}{2\pi} - \frac{9m^2}{16} \right) T_0. \quad (23)$$

В данном приближении интервал неустойчивости вблизи резонанса третьего порядка имеет такую же ширину  $(m/\pi)T_0$ , что и интервал в окрестности основного резонанса. Однако третий интервал характеризуется большей асимметрией: его середина смещена в сторону меньших значений от  $T = 3T_0/2$  на  $(9/16)m^2T_0$ .

При умеренных значениях глубины модуляции по прямоугольному кусочно-постоянному закону параметрический резонанс второго порядка  $n = 2$  (один цикл модуляции на протяжении одного периода собственных колебаний) оказывается сравнительно слабым по сравнению с рассмотренными выше резонансами с  $n = 1$  и  $n = 3$ . Дело в том, что в случае  $n = 2$  скачкообразные изменения момента инерции вызывают одно увеличение и одно уменьшение энергии осциллятора за период. Рост амплитуды колебаний возможен лишь тогда, когда прирост энергии, происходящий при сближении грузов, превосходит убыль энергии при обратном раздвижении грузов. Это может быть только при условии, что грузы сдвигаются к оси в моменты времени, когда угловая скорость ротора больше, чем когда грузы раздвигаются в стороны. При  $T \approx T_{av}$  выполнение такого условия может обеспечиваться лишь за счет малого различия в периодах  $T_1$  и  $T_2$  собственных колебаний ротора при раздвинутых и сдвинутых к оси грузах. Это различие периодов  $T_1$  и  $T_2$  само пропорционально малой величине  $m$ .

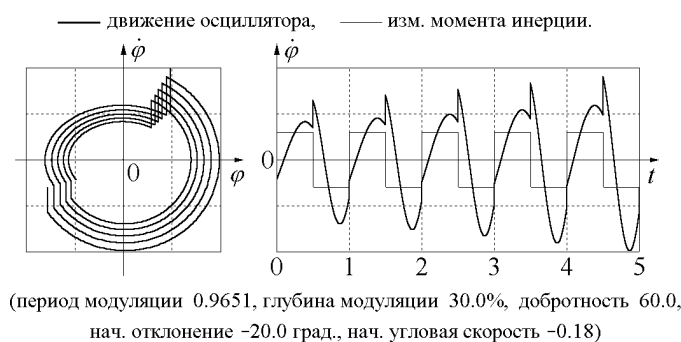


Рис. 8: Фазовая траектория колебаний и график угловой скорости при резонансе второго порядка ( $T = T_{av}$ ).

Рост амплитуды колебаний в условиях параметрического резонанса второго порядка показан на рис. 8. В этом случае вложение энергии за период пропорционально *квадрату* глубины модуляции  $m$ , в то время как при резонансах с  $n = 1$  и  $n = 3$  вложение энергии пропорционально первой степени  $m$ . Поэтому при том же значении постоянной затухания  $\gamma$  (при той же добротности  $Q$ ) требуется значительно большая глубина модуляции параметра, чтобы превзойти порог параметрического резонанса второго порядка.

Интервал параметрической неустойчивости в окрестности резонанса второго порядка значительно уже по сравнению с интервалами, соответствующими  $n = 1$  и  $n = 3$ : его ширина также пропорциональна лишь квадрату  $m$  (для малых  $m$ ). Для нахождения границ этого интервала можно рассмотреть, как это было сделано выше для других резонансов, стационарные колебания при  $T \approx T_0$ , образованные чередующимися участками свободных синусоидальных колебаний с периодами  $T_1$  и  $T_2$ . Фазовая траектория и график угловой скорости для таких периодических колебаний на одной из границ показан на рис. 1.7. В случае стационарных колебаний на границе в отсутствие трения скачкообразные увеличения и уменьшения угловой скорости в точности компенсируются.

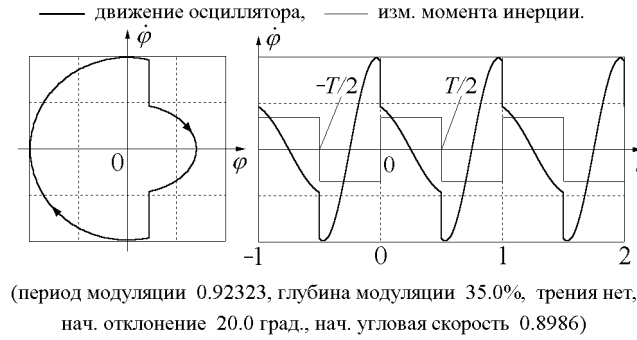


Рис. 9: Стационарные параметрические колебания на нижней границе интервала неустойчивости второго порядка (вблизи  $T = T_{av}$ ).

Для описания этих стационарных колебаний можно воспользоваться прежними выражениями (12)–(13) для  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$ . Условия сшивания графиков при  $t = 0$  также остаются прежними. Различия появляются лишь в уравнениях для постоянных  $A$  и  $B$ . Эти уравнения определяются из требований периодичности в моменты  $-T/2$  и  $T/2$ . В случае стационарных периодических колебаний, соответствующих резонансу с  $n = 2$  (и всем резонансам четных порядков  $n = 2, 4, \dots$  в (11)), эти условия имеют вид:

$$\varphi_1(T/2) = \varphi_2(-T/2), \quad (1 + m)\dot{\varphi}_1(T/2) = (1 - m)\dot{\varphi}_2(-T/2), \quad (24)$$

и мы получаем следующую систему уравнений для амплитуд  $A$  и  $B$ :

$$\begin{aligned} (S_1 + kS_2)A + (C_1 - C_2)B &= 0, \\ k(C_1 - C_2)A - (kS_1 + S_2)B &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $S_1, C_1$  и  $S_2, C_2$  по-прежнему определяются соотношениями (16). Однородная система уравнений (25) для  $A$  и  $B$  имеет нетривиальное решение при условии равенства нулю ее определителя:

$$2kC_1C_2 - (1 + k^2)S_1S_2 - 2k = 0. \quad (26)$$

Для нахождения значений  $T_{\mp} = T_{av} + \Delta T$  для границ интервала неустойчивости с  $n = 2$  преобразуем произведения  $C_1C_2$  и  $S_1S_2$  в уравнении (26) с помощью тождества  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$ :

$$(1 + k) \sin \frac{\omega_{av}T}{2} = \pm |1 - k| \sin \frac{\Delta\omega T}{4}. \quad (27)$$

Затем заменим искомое значение периода  $T$  в аргументе синуса в левой части уравнения (27) на  $T_{av} + \Delta T$ , где  $\Delta T \ll T_0$ . Поскольку  $\omega_{av}T_{av} = 2\pi$ , этот синус можно записать как  $-\sin(\omega_{av}\Delta T/2)$ , после чего уравнение (18) принимает вид:

$$\sin \frac{\omega_{av} \Delta T}{2} = \mp \frac{|1-k|}{1+k} \sin \frac{\Delta \omega (T_{av} + \Delta T)}{4}. \quad (28)$$

Это уравнение определяет левую границу  $T_-$  интервала неустойчивости, когда берется верхний знак в его правой части, и правую границу  $T_+$  в противоположном случае. Стационарные колебания для правой границы интервала показаны на рис. 10.

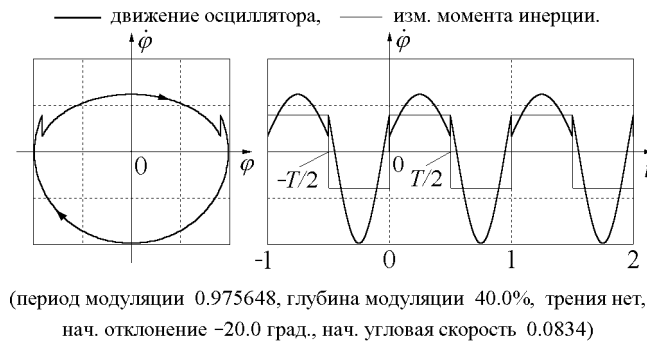


Рис. 10: Стационарные параметрические колебания на правой границе второго интервала неустойчивости (вблизи  $T = T_{av} \approx T_0$ ).

В компьютерной программе уравнение (28) для  $\Delta T$  также решается численно методом итераций. Подставляя  $T_-$  или  $T_+$ , найденные из (28), в одно из уравнений (15), мы получаем отношение амплитуд  $A$  и  $B$ , которым определяется профиль стационарных колебаний на соответствующей границе интервала неустойчивости.

Для умеренных значений глубины модуляции можно найти приближенное аналитическое решение уравнения (28):

$$T_{\mp} = \left( 1 \mp \frac{1}{4} m^2 \right) T_{av}. \quad (29)$$

Через  $T_0$  эти границы второго интервала выражаются следующим образом:

$$T_{\mp} = T_0 + \left( \mp \frac{1}{4} - \frac{3}{8} \right) m^2 T_0, \quad (30)$$

т. е.  $T_- = T_0 - (5/8)m^2 T_0$ ,  $T_+ = T_0 - (1/8)m^2 T_0$ . Как уже отмечалось выше, ширина  $T_+ - T_- = (m^2/2)T_0$  этого интервала неустойчивости пропорциональна квадрату глубины модуляции.

Интервалы неустойчивости для первых пяти параметрических резонансов показаны на диаграмме рис. 11 для разных значений глубины модуляции  $m$ . Диаграмма получена численным решением обсуждавшихся выше уравнений. Отметим, насколько узки интервалы для резонансов четных порядков ( $n = 2, 4$ ) при малых значениях  $m$ . С ростом  $m$  эти интервалы расширяются и становятся сравнимыми с интервалами нечетных порядков.

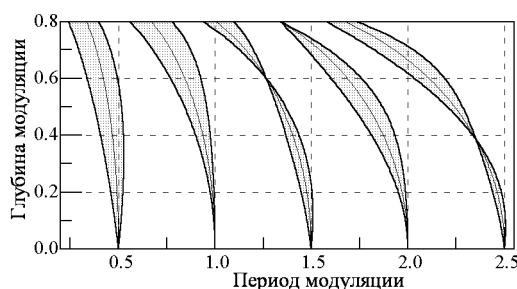


Рис. 11: Интервалы параметрического возбуждения при прямоугольной модуляции момента инерции в отсутствие трения.

Из диаграммы на рис. 11 видно, что для некоторых значений глубины модуляции  $m$  обе границы интервалов с  $n > 2$  совпадают (можно считать, что при таких  $m$  они *пересекаются*). Это значит, что при таких значениях глубины модуляции соответствующие интервалы параметрического возбуждения исчезают. Этому исчезновению интервалов параметрического возбуждения можно дать простое физическое объяснение, если обратить внимание на соотношение периодов собственных колебаний  $T_1$  и  $T_2$  (при раздвинутых и сдвинутых грузах) для соответствующих значений  $m$ . Оказывается, что  $T_1$  и  $T_2$  относятся как 2:1, 3:1, и 3:2. В случае первого пересечения (с отношением собственных периодов 2:1) за первую половину цикла модуляции происходит ровно половина собственного колебания ротора с периодом  $T_1$ , а за вторую — целое колебание с периодом  $T_2$  (три полных собственных колебания за один цикл модуляции). Ясно, что в таких условиях модуляции процесс колебаний будет периодическим всегда, при любых начальных условиях. Следовательно, для соответствующих значений глубины модуляции  $m$  и периода модуляции  $T$  не будет ни роста, ни убывания амплитуды: при любых начальных условиях происходят стационарные колебания.

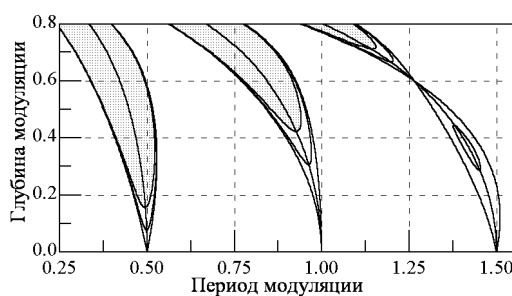


Рис. 12: Интервалы параметрического возбуждения для первых трех резонансов при прямоугольной модуляции момента инерции (в отсутствие трения, для  $Q = 20$  и для  $Q = 10$ ).

При наличии трения в системе интервалы параметрического резонанса становятся уже и при

достаточно сильном трении исчезают совсем. Когда глубина модуляции превышает пороговое значение, приближенные значения для границ первого интервала даются выражениями (20) или (21), если подставить в них вместо  $m$  величину  $\sqrt{m^2 - m_{\min}^2}$ , в которой пороговое значение глубины модуляции  $m_{\min} = \pi/(2Q)$  определяется выражением (6). Доказать это утверждение предлагается самостоятельно в качестве упражнения (задача 1.9). Для третьего интервала можно воспользоваться выражением (22) или (23), подставляя туда вместо  $m$  величину  $\sqrt{m^2 - m_{\min}^2}$ , в которой  $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$ . Когда глубина модуляции  $m$  равна пороговому значению  $m_{\min}$ , соответствующий интервал параметрического возбуждения исчезает.

Границы второго интервала параметрического резонанса при наличии трения даются выражениями (29) или (30), если подставить в них вместо  $m^2$  выражение  $\sqrt{m^4 - m_{\min}^4}$  с пороговым значением  $m_{\min} = \sqrt{2/Q}$ , соответствующим резонансу второго порядка (см. задачи 3.2 и 3.3).

Диаграмма на рис. 12 показывает границы первых трех интервалов параметрического резонанса в отсутствие трения, для  $Q = 20$ , и для  $Q = 10$ . Обратите внимание на «островок» параметрического резонанса для  $n = 3$  и  $Q = 20$ . Этот резонанс пропадает, когда глубина модуляции достигает значения 45% и появляется снова, когда  $m$  превышает примерно 66%.

Для каждого данного значения глубины модуляции  $m$  могут существовать лишь несколько первых интервалов параметрического возбуждения, для которых  $m$  превышает пороговое значение.

Подчеркнем еще раз, что даже в том случае, когда положение равновесия системы неустойчиво вследствие периодической модуляции параметра (т. е. когда выполняются необходимые условия для возбуждения параметрического резонанса), осциллятор будет оставаться в покое в положении равновесия, если заданы нулевые начальные условия, т. е.  $\varphi(0)$  и  $\dot{\varphi}(0)$  в точности равны нулю. В этом заключается одно из отличий параметрического резонанса от обычного резонанса при вынужденных колебаниях, для которого амплитуда растет даже при нулевых начальных условиях. Для возбуждения параметрического резонанса, кроме выполнения условия превышения порога, в системе должны обязательно существовать хотя бы слабые собственные колебания. В реальных системах такие колебания всегда существуют из-за флуктуаций.

В линейной системе при превышении порога параметрического возбуждения амплитуда колебаний неограниченно растет со временем по экспоненциальному закону. В противоположность случаю вынужденных колебаний, вязкое трение не в состоянии ограничить рост амплитуды колебаний при параметрическом резонансе. В реальных системах рост амплитуды ограничивается нелинейными явлениями, приводящими к зависимости периода собственных колебаний от амплитуды. По мере роста амплитуды параметрически возбуждаемых колебаний изменяется собственный период колебаний и поэтому нарушаются условия резонанса. Рост амплитуды сменяется ее уменьшением. При малых амплитудах условия резонанса восстанавливаются, и амплитуда снова начинает расти. При наличии трения такие переходные биения в нелинейной системе постепенно затухают, и устанавливается стационарный режим колебаний с конечной амплитудой.

## 2 Контрольные вопросы и задачи

### 2.1 Основной параметрический резонанс

1.1\* **Основной резонанс ( $n = 1$ ) в отсутствие трения.** Задайте умеренное значение глубины  $m$  модуляции момента инерции (около 10 – 15%). Пусть период модуляции  $T$  равен половине периода  $T_0$  собственных колебаний осциллятора. Чтобы принудительная модуляция параметра вызвала резонанс, осциллятор с самого начала должен совершать хотя бы небольшие собственные колебания, т. е. должны быть заданы ненулевые начальные условия.

(а) Какого вида начальные условия следует задать, чтобы сразу после включения модуляции момента инерции начался быструй резонансный рост амплитуды колебаний? Напомним, что в принятой модели в начальный момент времени  $t = 0$  грузы скачкообразно раздвигаются в стороны от оси вращения, так что момент инерции ротора возрастает.

(б) Какого вида начальные условия приведут сначала к постепенному затуханию уже существующих колебаний? Проверьте свой ответ в моделирующем эксперименте. Используя полученные графики колебаний, объясните физическую причину первоначального уменьшения амплитуды колебаний. Примите во внимание фазовые соотношения между собственными колебаниями ротора и принудительными периодическими изменениями его момента инерции. Почему через некоторое время убывание амплитуды колебаний сменяется ее возрастанием?

(в)\*\*\* Попытайтесь выяснить, какими факторами определяется промежуток времени, по истечении которого первоначальное затухание колебаний сменяется их неограниченным ростом.

1.2\* **Рост амплитуды в условиях основного резонанса в отсутствие трения.** Пусть принудительная модуляция момента инерции происходит с периодом  $T$ , равным половине периода  $T_0$  собственных колебаний осциллятора ( $T = T_0/2$ ).

(а) По какому закону растет со временем амплитуда колебаний в условиях основного резонанса, если задано некоторое начальное отклонение  $\varphi(0) = \varphi_0$  и нулевая начальная скорость  $\dot{\varphi}(0) = 0$ ? При каком значении глубины модуляции  $m$  (в отсутствие трения) начальная амплитуда колебаний удвоится за 10 циклов модуляции момента инерции? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) Чем будет отличаться процесс резонансной раскачки от случая, рассмотренного в пункте (а), если задать такое же по величине начальное отклонение в противоположную сторону?

#### 1.3\* **Порог возбуждения для основного резонанса.**

(а) Выбрав умеренное значение глубины модуляции момента инерции (скажем,  $m = 15\%$ ), оцените пороговое (минимальное) значение добротности  $Q_{\min}$  в условиях настройки периода модуляции на основной резонанс ( $T = T_0/2$ ). Напомним, что пороговый режим соответствует стационарным колебаниям неизменной амплитуды (параметрическая регенерация). При каких начальных условиях колебания осциллятора с пороговым значением добротности  $Q = Q_{\min}$  сразу будут стационарными?

(б) Уточните Вашу теоретическую оценку порогового значения добротности  $Q_{\min}$  с помощью моделирующего эксперимента на компьютере (методом проб и ошибок). В чем заключается при-

чина расхождений теоретического и экспериментального значений?

(в) Исследуйте устойчивость режима параметрической регенерации, т. е. режима стационарных колебаний в условиях порога возбуждения (для  $Q = Q_{\min}$ ). Устойчив ли этот режим по отношению к малым изменениям параметров системы (периода и глубины модуляции, добротности)? Устойчив ли режим регенерации по отношению к малым изменениям начальных условий?

(г)\*\* Пороговое значение добротности, обеспечивающее стационарные колебания при заданной глубине модуляции  $m$ , будет абсолютно минимальным при *точной* настройке периода модуляции на резонанс. При малых значениях  $m$  основной резонанс имеет место при  $T = T_0/2$ . Однако с ростом  $m$  резонансное значение периода модуляции начинает отклоняться от  $T_0/2$ . Получите выражение для резонансного значения периода модуляции при произвольно большой глубине модуляции  $m$  и сделайте численные оценки  $T$  для  $m = 15\%$  и  $m = 40\%$ .

#### 1.4\* Рост амплитуды параметрических колебаний при превышении порога возбуждения.

(а) Для периода модуляции  $T = T_0/2$  и глубины модуляции  $m = 15\%$ , во сколько раз возрастает амплитуда колебаний за 10 циклов модуляции параметра, если добротность вдвое больше своего порогового значения, т. е.  $Q = 2Q_{\min}$ ? Зависит ли ответ на этот вопрос от начальных условий? Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) Какой будет амплитуда колебаний спустя еще 10 периодов модуляции? Почему при превышении порога возбуждения трение не в состоянии ограничить роста амплитуды колебаний, возбуждаемых параметрически?

#### 1.5\*\* Основной интервал параметрического резонанса в отсутствие трения.

(а) Выполните теоретический расчет значений периода модуляции  $T$ , соответствующих границам основного интервала параметрической неустойчивости, для заданного значения глубины модуляции  $m$  (в приближении  $m \ll 1$ ) для случая, когда трение отсутствует.

(б) Как ширина интервала неустойчивости зависит от глубины модуляции? Влияют ли члены второго порядка малости (по параметру  $m \ll 1$ ) на ширину интервала?

#### 1.6\*\* Колебания на границах основного интервала параметрической неустойчивости.

Введите значение периода модуляции  $T$ , соответствующее одной из границ основного интервала параметрической неустойчивости при заданной глубине модуляции (в отсутствие трения). Эти границы замечательны тем, что для них возможны стационарные периодические колебания неизменной амплитуды. Однако при произвольных начальных условиях форма колебаний будет постепенно изменяться, т. е. периодического процесса не будет. Амплитуда колебаний будет сначала увеличиваться, а через некоторое время уменьшаться и потом снова возрастет, либо наоборот, сначала уменьшаться, а затем увеличиваться. Почему?

#### 1.7\*\* Начальные условия для периодических колебаний на границах интервала.

(а) Введите значение периода модуляции, соответствующее нижней границе основного интервала параметрической неустойчивости при заданном значении глубины модуляции  $m$  (в отсутствие трения). Задайте произвольно некоторое начальное отклонение ротора. Какую начальную скорость необходимо задать для того, чтобы получить в моделирующем эксперименте ста-



ционарные периодические колебания неизменной амплитуды? Сделайте соответствующие расчеты и эксперименты также и для верхней границы интервала неустойчивости.

(б) Объясните характерные особенности наблюдаемых графиков и фазовой траектории для стационарных колебаний на каждой из границ основного интервала параметрической неустойчивости.

(в) Для выбранного значения начального угла отклонения  $\varphi_0$  и рассчитанного значения начальной угловой скорости  $\dot{\varphi}(0)$ , обеспечивающей стационарные колебания на границе интервала, рассчитайте амплитуду колебаний (для каждой из границ интервала). Проверьте свои теоретические значения в эксперименте.

**1.8\*\* Порог параметрического возбуждения в пределах резонансного интервала.** Режим параметрической генерации при точной настройке на основной резонанс был рассмотрен в задаче 1.3, где требовалось найти минимальное значение добротности  $Q = Q_{\min}$ , обеспечивающее стационарные колебания. Но стационарные колебания возможны и при некоторой расстройке периода модуляции относительно его резонансного значения.

(а) Выберите некоторое значение периода модуляции  $T$  где-либо в пределах интервала параметрического резонанса (для заданной глубины модуляции  $m$ ), например, посередине между резонансным значением и одной из границ. Оцените наблюдаемый в эксперименте рост амплитуды колебаний в отсутствие трения, и затем на основе этих наблюдений рассчитайте то минимальное (пороговое) значение добротности  $Q = Q_{\min}$ , которое может обеспечить стационарные колебания при данных значениях глубины и периода модуляции.

(б) Проверьте свою оценку  $Q = Q_{\min}$  в эксперименте и уточните ее методом проб и ошибок. Сравните наблюдаемые графики (и фазовые траектории) стационарных колебаний с соответствующими графиками стационарного процесса параметрической регенерации в условиях точной настройки периода модуляции на основной резонанс, а также с графиками стационарных колебаний на границах интервала в отсутствие трения. Чем объясняются наблюдаемые отличия?

(в)\*\*\* Для малых значений глубины модуляции  $m \ll 1$  рассчитайте с точностью до членов второго порядка по  $m$  пороговое значение добротности  $Q = Q_{\min}$  для значения периода модуляции, лежащего в произвольной точке внутри интервала параметрического резонанса. Сравните свой теоретический результат с оценкой, полученной экспериментально в пунктах (а) и (б).

**1.9\*\*\* Основной интервал параметрического резонанса при наличии трения.**

(а) Для некоторого фиксированного значения глубины модуляции  $m$  частотный интервал параметрического резонанса сужается с увеличением трения и исчезает совсем, когда добротность уменьшается до порогового значения. Допустим, что добротность  $Q$  больше своего порогового значения  $Q_{\min}$ . Рассчитайте значения  $T_-$  и  $T_+$  периода модуляции  $T$ , соответствующие границам интервала параметрического резонанса для заданных  $m$  и  $Q$  (в приближении  $m \ll 1$ ). Выразите  $T_-$  и  $T_+$  через  $m$  и  $m_{\min}$ , где  $m_{\min} = \pi/(2Q)$  — приближенное значение пороговой глубины модуляции  $m$  для данной добротности  $Q$  (в условиях точной настройки на основной резонанс).

(б) Чтобы в моделирующем эксперименте наблюдать стационарные колебания, соответствующие этим границам, необходимо задать начальные условия должным образом. Какую начальную скорость нужно ввести при заданном начальном отклонении  $\varphi_0$ , чтобы получить стационар-

ные колебания (для каждой из границ интервала)? Проверьте свои расчеты в эксперименте.

**1.10 Колебания за пределами интервалов параметрического резонанса.** Для некоторого произвольного значения  $m$  введите период модуляции  $T$ , находящийся вне пределов интервалов параметрического резонанса. Убедитесь, что какими бы ни были начальные условия, колебания рано или поздно затухнут даже при очень слабом трении, и осциллятор будет покоиться в положении равновесия, несмотря на периодические изменения момента инерции.

## 2.2 Параметрические резонансы и интервалы неустойчивости высоких порядков ( $n > 1$ )

### 2.1\* Параметрический резонанс третьего порядка ( $n = 3$ ) в отсутствие трения.

(а) Исследуйте экспериментально параметрическое возбуждение ротора при скачкообразных изменениях момента инерции ротора с периодом  $T \approx 3T_0/2$  (приблизительно полтора периода собственных колебаний, или три цикла изменения параметра на протяжении двух собственных колебаний). Какие начальные условия обеспечат рост колебаний с самого начала модуляции параметра?

(б) Какое значение  $m$  глубины модуляции момента инерции необходимо задать, чтобы в отсутствие трения начальная амплитуда колебаний удвоилась за 15 циклов модуляции при настройке на резонанс третьего порядка? Сколько циклов модуляции необходимо для того, чтобы амплитуда удвоилась еще раз?

(в) При каких начальных условиях амплитуда колебаний сначала будет убывать? Почему это затухание колебаний через некоторое время неизбежно сменится их ростом?

### 2.2\* Порог возбуждения для параметрического резонанса третьего порядка.

(а) Выполните теоретическую оценку порогового (минимального) значения добротности осциллятора  $Q_{\min}$  при малом значении глубины модуляции  $m \ll 1$  с точностью до членов первого порядка по  $m$ . Сравните полученное значение с пороговой добротностью для основного резонанса (задача 1.3) и для резонанса второго порядка  $n = 2$  (см. задачу 3.4). Как можно объяснить это различие пороговых значений добротности для резонансов разных порядков?

(б) Для глубины модуляции  $m = 30\%$  рассчитайте минимальное значение добротности  $Q_{\min}$ , при котором возможно параметрическое возбуждение колебаний (на основе теоретической оценки, полученной при ответе на предыдущий вопрос данной задачи). Улучшите теоретическую оценку методом проб и ошибок. Объясните наблюдаемую форму графиков и фазовой траектории стационарных колебаний при  $Q_{\min}$ . Какие факторы определяют амплитуду таких колебаний?

### 2.3\*\* Третий интервал параметрического возбуждения.

(а) Рассчитайте приближенно значения периода модуляции  $T$ , которые соответствуют границам третьего интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения при заданной глубине модуляции момента инерции (в приближении  $m \ll 1$ ) с точностью до членов первого порядка по  $m$ . Как ширина третьего интервала зависит от глубины модуляции? Влияют ли члены второго порядка на ширину интервала?

(б) Какую начальную угловую скорость следует ввести при выбранном начальном отклонении  $\varphi_0$  для того, чтобы получить стационарные периодические колебания неизменной амплитуды (для каждой из границ третьего интервала параметрического резонанса)? Проверьте свой ответ в эксперименте. Чем отличаются фазовые траектории, соответствующие стационарным колебаниям на нижней и верхней границах этого интервала?

(в) Исследуйте ширину третьего интервала параметрического возбуждения в отсутствие трения при произвольно больших амплитудах модуляции  $m$  (см. рис. 11 на стр. 21). Обратите внимание, как ведет себя третий интервал при увеличении глубины модуляции. Какими физическими причинами можно объяснить постепенное смещение интервала в сторону более коротких периодов модуляции?

(г) При  $m = 60\%$  обе границы третьего интервала параметрического резонанса совпадают (можно сказать, что они пересекаются при  $m = 60\%$ ). Какими физическими причинами объясняется это исчезновение третьего интервала при такой глубине модуляции момента инерции?

#### 2.4\*\* Третий интервал параметрического резонанса при наличии трения.

(а) При малых  $m$  параметрический резонанс третьего порядка имеет место при  $T = 3T_0/2$ . Однако по мере увеличения глубины модуляции  $m$  резонансное значение периода модуляции все сильнее отклоняется от  $3T_0/2$ . Получите аналитическое выражение для периода модуляции, соответствующее точной настройке на третий резонанс для произвольных (в том числе приближающихся к 100%) значений глубины модуляции. Каковы резонансные значения периода для  $m = 15\%$ ,  $m = 40\%$  и  $m = 60\%$ ?

(б) Как влияет трение на ширину третьего интервала параметрического резонанса? Для малых глубин модуляции  $m \ll 1$  рассчитайте приближенно значения периода модуляции  $T$ , соответствующие границам интервала при заданной добротности  $Q$ . Ответ выразите через  $m$  и пороговое значение  $m_{\min} = 3\pi/(2Q)$  (см. задачу 3.2).

#### 2.5\*\* Параметрический резонанс второго порядка.

(а) При небольших значениях глубины модуляции ( $m < 20\%$ ) резонанс второго порядка оказывается слабее не только резонанса первого порядка, но и резонанса третьего порядка: при настройке периода модуляции на резонанс второго порядка амплитуда колебаний растет значительно медленнее, чем при настройке на резонансы  $n = 1$  и  $n = 3$  (для той же глубины модуляции). Какие физические причины можете Вы привести для объяснения того, что резонанс с  $n = 2$  (как и другие резонансы четных порядков) при небольших значениях  $m$  выражен значительно слабее, чем резонансы нечетных порядков? Объясните наблюдаемую форму фазовой траектории при резонансе второго порядка.

(б) Какие начальные условия нужно задать для получения наиболее быстрого роста амплитуды колебаний при резонансе второго порядка? Попытайтесь определить экспериментально пороговое значение глубины модуляции для этого резонанса при заданной добротности (например, при  $Q = 15$ ).

(в)\*\* Для малых значений глубины модуляции  $m \ll 1$  рассчитайте теоретически пороговое значение добротности  $Q_{\min}$ . (Для этого придется при расчете удерживать члены второго порядка малости по параметру  $m$ ). Как пороговое значение добротности  $Q_{\min}$  зависит от  $m$ ? Сравните

полученное теоретическое значение с порогом для основного резонанса и для резонанса третьего порядка. Объясните качественно эти различия, привлекая соображения физического характера. Сравните также теоретическое значение пороговой добротности с найденным экспериментально в пункте (б).

**2.6\*\* Второй интервал параметрического резонанса.**

(а) Для малых значений глубины модуляции  $m \ll 1$  рассчитайте теоретически ширину интервала параметрической неустойчивости, окружающего резонанс второго порядка. (В этом расчете необходимо учитывать члены второго порядка малости по параметру  $m$ .) Как ширина второго интервала зависит от  $m$ ? Сравните полученный результат для  $n = 2$  с соответствующими величинами для основного интервала и для интервала порядка  $n = 3$ . Почему второй интервал при малых  $m$  значительно уже, чем интервал более высокого третьего порядка?

(б) Почему каждой из границ интервала неустойчивости с  $n = 2$  соответствуют две различные фазовые траектории? Чем различаются стационарные колебания, соответствующие различным фазовым траекториям для одной и той же границы? Как возбудить каждое из этих колебаний? Какие начальные условия приводят к стационарным колебаниям, если задан период модуляции, соответствующий одной из границ второго интервала параметрического резонанса?

**2.7\*\*\* Второй интервал параметрического резонанса при наличии трения.** Как влияет трение на ширину второго интервала параметрического возбуждения? Рассчитайте теоретически приближенные значения (для  $m \ll 1$ ) периода модуляции  $T_{\pm}$ , соответствующие границам этого интервала при заданном значении добротности  $Q$ , превосходящем пороговое значение  $Q_{\min}$ , отвечающее точной настройке периода модуляции на резонанс второго порядка (см. задачу 2.5). Выразите результат расчета границ интервала для заданного  $Q$  через  $m$  и  $Q_{\min}$ .