

# Осциллятор с несинусоидальной внешней силой

## Задачи для самостоятельного решения

Бутиков Е. И.

**Аннотация.** В данном пособии приведены контрольные вопросы, теоретические и экспериментальные задачи для самостоятельной работы к лабораторной работе «Осциллятор с несинусоидальной внешней силой», а также материал для возможных индивидуальных заданий студентам (по указанию преподавателя).

## Содержание

1	Резонансное возбуждение осциллятора	1
2	Нерезонансные вынужденные колебания	3
3	Приложение: сводка основных формул	5

## 1 Резонансное возбуждение осциллятора

**1.1 Основной резонанс в отсутствие трения.** Допустим, что трение полностью отсутствует, и что период  $T$  внешней силы в точности равен периоду  $T_0$  собственных колебаний осциллятора. Рассмотрите случай нулевых начальных условий, т. е. маховик покоится в среднем положении в момент включения внешнего воздействия.

(а) Какой должна быть угловая амплитуда  $\phi_0$  скачкообразных поворотов шатуна для того, чтобы размах колебаний маховика достиг  $180^\circ$  после первых 10 циклов движения шатуна? Проверьте свой результат в моделирующем эксперименте.

(б) По какому закону происходит рост амплитуды колебаний маховика? Объясните наблюдаемую форму фазовой траектории. Как растет со временем полная энергия осциллятора?

(в) В условиях точной настройки периода внешнего воздействия в резонанс с собственным периодом осциллятора, возможно ли убывание во времени амплитуды колебаний? Приведите физическое обоснование своему ответу. Подтверждается ли Ваш ответ моделирующим экспериментом?

**1.2 Высшие резонансы в отсутствие трения.** Исследуйте резонансное возбуждение первоначально покоившегося в среднем положении осциллятора в условиях, когда период внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени ровно в три раза больше периода собственных колебаний осциллятора ( $T = 3T_0$ ):

(а) При какой амплитуде  $\phi_0$  принудительных прямоугольных колебаний шатуна размах колебаний маховика достигнет значения  $180^\circ$  после первых 10 циклов движения шатуна? Проверьте свой ответ в эксперименте.

(б) В чем заключаются различия фазовых траекторий в данном случае и в случае основного резонанса ( $T = T_0$ )?

**1.3\* Переходный процесс и установившиеся колебания в условиях главного резонанса.** Полагая период прямоугольного внешнего воздействия равным периоду собственных колебаний осциллятора ( $T = T_0$ ), и считая маховик покоившимся в среднем положении до включения внешней силы, исследуйте переходный процесс и установившиеся колебания при наличии трения:

(а) Рассчитайте амплитуду установившихся колебаний маховика при амплитуде шатуна  $\phi_0 = 10^\circ$  и добротности осциллятора  $Q = 10$ . Проверьте свой результат в эксперименте.

(б) По какому закону происходит рост амплитуды при раскачке осциллятора из состояния покоя? Объясните особенности фазовой траектории, наблюдаемой в этом случае.

(в) Чему равна начальная амплитуда затухающих собственных колебаний, входящих в состав переходного процесса при  $\phi_0 = 10^\circ$  и  $Q = 10$ ? По какому закону амплитуда этих колебаний убывает со временем?

(г) Какими должны быть начальные условия для того, чтобы установившиеся вынужденные колебания происходили с самого начала, т. е. сразу после включения периодической прямоугольной внешней силы, без переходного процесса? Проверьте свой результат экспериментально.

(д) Изучите спектральный состав выходных установившихся колебаний в этом случае. Почему эти выходные колебания почти гармонические, несмотря на прямоугольную форму временной зависимости входных колебаний (принудительных колебаний возбуждающего шатуна)?

**1.4\* Установившиеся колебания в случаях резонансов высоких порядков.**

(а) Рассчитайте амплитуду установившихся колебаний для  $T = 3T_0$ ,  $\phi_0 = 25^\circ$ ,  $Q = 5$ . Проверьте результат Вашего расчета в эксперименте. Объясните наблюдаемую в этом случае форму графиков и фазовой траектории.

(б) Какие превращения энергии происходят в течение установившихся колебаний? Сопоставьте экспериментально наблюдаемые графики временной зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии с соответствующими графиками угловой скорости и угла отклонения маховика. Объясните наблюдаемую форму зависимости полной энергии осциллятора от угла отклонения. Как график полной энергии соотносится с параболическими потенциальными ямами, показанными на той же диаграмме?

(в) Какие гармоники определяют в данном случае форму установившихся колебаний? Почему, несмотря на точную настройку осциллятора на частоту третьей гармоники внешнего воз-

действия, его первая гармоника заметно влияет на форму выходных колебаний? Каким образом первая гармоника проявляет себя в колебаниях осциллятора?

(г) Исследуйте теоретически и экспериментально влияние трения на спектральный состав и форму установившихся колебаний осциллятора при  $T = 3T_0$ . Обратите внимание на относительное уменьшение вклада первой и пятой гармоник по мере увеличения добротности осциллятора.

(д) Изучите установившиеся колебания при резонансах пятого и седьмого порядков (т. е. при совпадении частоты пятой или седьмой гармоники вынуждающих прямоугольных импульсов с собственной частотой осциллятора). Обратите внимание на характер преобразования спектра в этих случаях и на зависимость спектра установившихся колебаний от добротности осциллятора. Какой вид имеет фазовая траектория для этих резонансов? Сделайте теоретическую оценку максимального размаха установившихся колебаний маховика при  $T = 5T_0$  для случаев высокой добротности осциллятора ( $Q$  порядка 15 – 20) и сильного трения ( $Q$  порядка 1 – 3).

## 2 Нерезонансные вынужденные колебания

**2.1\* Вынужденные колебания и условия отсутствия переходного процесса при  $T = 2T_0$ .**

(а) Предскажите теоретически формы графиков угла отклонения, угловой скорости и фазовой траектории установившихся колебаний осциллятора для  $T = 2T_0$  при отсутствии трения (и при очень слабом трении). Какими должны быть начальные условия, чтобы установившиеся колебания происходили сразу после включения внешнего воздействия, т. е. чтобы не было переходного процесса? Проверьте свои предсказания в моделирующем эксперименте.

(б) Почему в случае установившихся колебаний при  $T = 2T_0$  в отсутствие трения при принудительных скачкообразных поворотах шатуна не происходит обмена энергией между осциллятором и внешним источником (осциллятор не получает и не отдает энергию)?

(в) Изучите спектральный состав установившихся колебаний при  $T = 2T_0$ . Особое внимание обратите на вклад третьей гармоники в выходные колебания. Частота третьей гармоники в данном случае выше собственной частоты осциллятора, и поэтому на выходе она имеет обращенную фазу. Каким образом это изменение фазы третьей гармоники сказывается на форме результирующих выходных колебаний? Почему при сложении первой и третьей гармоник в выходных колебаниях вместо уплощенной кривой (соответствующей плоским прямоугольным импульсам на входе) получается кривая с «буграми» на месте плоских горизонтальных участков входных прямоугольных импульсов?

**2.2\* Установившиеся колебания при  $T = 2T_0$  и  $T = 4T_0$ .**

(а) Рассмотрите вынужденные колебания осциллятора в случае  $T = 2T_0$  при наличии умеренного трения (скажем,  $Q = 5$ ). К каким изменениям (по сравнению с рассмотренным выше случаем полного отсутствия трения) приводит это небольшое трение на графиках временной зависимости и на фазовой траектории установившихся колебаний? Обратите внимание на изменения в энергетических превращениях.

(б) Почему при  $T = 2T_0$  трение почти не сказывается на спектральном составе установившихся колебаний осциллятора, в отличие от случая  $T = 3T_0$ ?

(в) Рассчитайте размах установившихся колебаний маховика (максимальный угол отклонения от средней точки) при  $T = 2T_0$ ,  $\phi_0 = 25^\circ$ ,  $Q = 5$ . Сравните результат со случаем отсутствия трения. Проверьте свой ответ в эксперименте.

(г) Рассчитайте размах  $\varphi_m$  установившихся вынужденных колебаний маховика при  $T = 4T_0$ ,  $\phi_0 = 25^\circ$ ,  $Q = 5$ .

(д)\*\* В отсутствие трения размах установившихся вынужденных колебаний маховика при  $T = 4T_0$ , как и при  $T = 2T_0$ , равен  $2\phi_0$ , т. е. ровно вдвое больше, чем размах принудительных скачкообразных поворотов шатуна. Но если при  $T = 2T_0$  введение трения приводит только к уменьшению амплитуды установившихся колебаний, то при  $T = 4T_0$  введение небольшого трения приводит к увеличению амплитуды маховика. По мере увеличения трения амплитуда установившихся колебаний сначала растет, достигает максимума при некотором значении добротности, и затем убывает при дальнейшем увеличении трения. Объясните качественно такую необычную, на первый взгляд, зависимость амплитуды от трения. Найдите то значение добротности  $Q_m$ , при котором амплитуда установившихся колебаний максимальна, и рассчитайте эту максимальную амплитуду  $\varphi_{\max}$ . Во сколько раз эта максимальная амплитуда  $\varphi_{\max}$  превосходит размах  $\phi_0$  поворотов возбуждающего шатуна? Ответьте на те же вопросы для установившихся колебаний при  $T = 6T_0$ .

### 2.3 Установившиеся колебания при большом периоде возбуждения ( $T \gg T_0$ ).

(а) Изучите вынужденные колебания осциллятора под действием внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени в условиях, когда собственная частота осциллятора лежит где-нибудь в интервале между частотами двух последовательных нечетных гармоник высокого порядка (например, при  $5T_0 < T < 7T_0$ ). Какие гармоники доминируют в установившихся выходных колебаниях осциллятора? Сравните форму колебаний на выходе с формой импульсов входного воздействия. В чем заключается основное отличие формы колебаний на входе и на выходе?

(б) Исследуйте влияние трения на характер установившихся колебаний. Почему при сильном затухании наблюдаются меньшие искажения (по сравнению со случаем слабого трения), т. е. выходные импульсы имеют почти прямоугольную форму?

(в) Объясните характер превращений энергии при таких колебаниях, используя получаемый в процессе моделирования график зависимости полной энергии от угла отклонения. Какова взаимосвязь этого графика с параболическими потенциальными ямами, показанными на той же диаграмме?

(г) Оцените максимальное отклонение маховика в таких установившихся колебаниях при  $T \gg T_0$  и сильном трении (рассмотрите отдельно случаи  $Q$  порядка 1 – 3 и  $Q = 1/2$ ).

### 2.4 Установившиеся вынужденные колебания под действием импульсов малого периода.

(а) Пусть период  $T$  внешнего момента с прямоугольной зависимостью от времени составляет небольшую часть (скажем, 0.2 – 0.3) собственного периода осциллятора  $T_0$ . В таких услови-

ях график зависимости угловой скорости маховика от времени при установившихся колебаниях представляет собой «пилу» с почти прямолинейными треугольными равнобедренными зубцами. Почему? Предложите физическое объяснение такой форме графика скорости. Чем в этом случае отличается от синусоиды график зависимости угла отклонения от времени?

(б) Оцените теоретически высоту зубцов графика зависимости угловой скорости от времени при заданных значениях периода и амплитуды принудительных скачкообразных поворотов шатуна. Оцените также максимальный угол отклонения маховика от среднего положения при таких установившихся колебаниях, приняв для  $T$  значение  $T_0/4$  и  $\phi_0 = 30^\circ$  для амплитуды шатуна. Какой спектральный состав характерен для таких колебаний?

### 3 Приложение: сводка основных формул

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний торсионного пружинного осциллятора под действием прямоугольного внешнего момента:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \begin{cases} \omega_0^2\phi_0, & (0, T/2), \\ -\omega_0^2\phi_0, & (T/2, T). \end{cases}$$

То же уравнение с разложением в ряд Фурье правой части, выражающей прямоугольную кусочно-постоянную зависимость от времени вынуждающего момента внешней силы:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0\omega_0^2}{\pi k} \sin \omega_k t.$$

Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся вынужденные колебания:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{4\phi_0}{\pi k} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_k^2)^2 + 4\gamma^2\omega_k^2}} \sin(\omega_k t + \alpha_k),$$

где фазы  $\alpha_k$  отдельных гармоник определяются соотношением:

$$\tan \alpha_k = \frac{2\gamma\omega_k}{\omega_k^2 - \omega_0^2}.$$

Зависимость от времени  $\varphi(t)$  на протяжении интервала  $(0, T/2)$ , пока положение равновесия находится справа при  $\varphi = \phi_0$ :

$$\varphi(t) = \phi_0 + Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta), \quad (0, T/2),$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$  — частота собственных затухающих колебаний,  $A$  и  $\theta$  — некоторые постоянные. Зависимость от времени  $\varphi(t)$  на протяжении интервала  $(T/2, T)$ , когда собственные колебания происходят около положения равновесия, расположенного при  $-\phi_0$ :

$$\varphi(t) = -\phi_0 - Ae^{-\gamma(t-T/2)} \cos(\omega_1(t - T/2) + \theta), \quad (T/2, T).$$

В установившихся колебаниях постоянные  $A$  и  $\theta$  имеют здесь те же значения, что и в выражении для  $(0, T/2)$ .