

Лабораторная работа № 7

Параметрические колебания при плавной модуляции параметра линейного осциллятора

Методические рекомендации

Цели работы:

- Познакомиться с физическими принципами параметрического возбуждения колебаний на наглядном примере механического торсионного линейного осциллятора, момент инерции которого принудительно изменяется по плавному периодическому (синусоидальному) закону.
- Получить представление об общих закономерностях параметрических колебаний и параметрическом резонансе в линейных системах.
- Исследовать экспериментально и теоретически условия возбуждения и особенности параметрического резонанса при плавной (синусоидальной) модуляции параметра (момента инерции) осциллятора.
- Рассчитать и проверить экспериментально порог возбуждения и интервалы параметрической неустойчивости для основного параметрического резонанса и резонанса второго порядка.

При подготовке к лабораторной работе следует:

1. Повторить соответствующий теоретический материал (тема 7, см. ниже), пользуясь конспектом лекций и рекомендованным Вам учебником физики.
2. Изучить Главу 7 «Синусоидальная модуляция параметра линейного осциллятора» в учебном пособии «Основы физики колебаний». Рекомендуется самостоятельно проделать вывод всех формул, особенно тех, что в пособии приведены без вывода.
3. Подготовить письменно краткие ответы на предлагаемые Вам «Вопросы для самоконтроля» (см. ниже).
4. Решить некоторые теоретические задачи из учебного пособия «Основы физики колебаний» (по индивидуальному заданию преподавателя).
5. Познакомиться с «Требованиями к оформлению отчета» о выполненной работе.

Теоретический материал (тема 7)

Параметрическое возбуждение линейного осциллятора при плавной (синусоидальной) модуляции параметра. Механическая модель линейной системы с параметрическим возбуждением — торсионный пружинный осциллятор с модулируемым моментом инерции ротора, и его электромагнитный аналог — колебательный контур с модулируемой индуктивностью катушки. Физические причины роста амплитуды и оценка порога возбуждения на основе энергетических соображений. Прогрессивный рост амплитуды при резонансе и режим параметрической регенерации. Дифференциальное уравнение торсионного осциллятора с синусоидальным радиальным движением грузов ротора и уравнение Матье. Частотные интервалы параметрического возбуждения. Влияние диссипации энергии на ширину интервалов неустойчивости. Резонансы высших порядков. Спектральный состав стационарных колебаний на границах интервалов параметрической неустойчивости и в режимах регенерации.

Вопросы для самоконтроля

1. Опишите физическую систему, которая моделируется в лабораторной работе (торсионный пружинный осциллятор с принудительно изменяемым моментом инерции). Какие параметры характеризуют математическую модель осциллятора, используемую в лабораторной работе? Какими переменными характеризуется механическое состояние осциллятора, совершающего колебания?
2. Какой физический параметр моделируемой системы подвергают принудительной модуляции? Каким образом реализуется в рассматриваемой модели плавная модуляция параметра? При каких условиях синусоидальное движение грузов вдоль стержня ротора приводит к синусоидальной модуляции момента инерции ротора? Что такое глубина модуляции?
3. В чем заключается принципиальное отличие параметрических колебаний от вынужденных колебаний, изучаемых в 4 и 5 лабораторных работах данного цикла?
4. Приведите качественное объяснение возможности параметрической раскачки пружинного осциллятора путем принудительных периодических изменений момента инерции его ротора. Какими должны быть период и фаза изменений момента инерции для возбуждения колебаний? Каким образом и за счет какого источника растет энергия осциллятора при параметрическом резонансе?
5. Рассматривая электромагнитный контур, аналогичный механическому пружинному осциллятору, объясните, каким образом можно возбудить в нем параметрические колебания. Какой параметр контура аналогичен моменту инерции торсионного осциллятора? Какой вид энергии в контуре аналогичен кинетической энергии ротора?
6. Перечислите основные отличия параметрического резонанса от обычного резонанса, вызываемого прямым действием на осциллятор периодической внешней силы.
7. Почему при наличии трения параметрический резонанс возможен только тогда, когда глубина модуляции параметра превосходит некоторое пороговое значение? Почему трение не в состоянии ограничить рост амплитуды колебаний при параметрическом резонансе?
8. Приведите вывод дифференциального уравнения параметрических колебаний торсионного осциллятора, моделируемого в данной лабораторной работе. Чем это уравнение отличается от уравнения, описывающего собственные и вынужденные колебания такого осциллятора?
9. Как можно оценить приращение энергии торсионного осциллятора за один цикл синусоидальной модуляции момента инерции ротора в условиях основного параметрического резонанса? Сделайте оценку порогового (минимального) значения глубины модуляции момента инерции для возбуждения основного резонанса. Как этот порог зависит от добротности осциллятора? Если, напротив, зафиксировать некоторое значение глубины модуляции момента инерции, то каким будет пороговое значение добротности?
10. Объясните вид графиков и фазовой траектории стационарных колебаний в условиях порога основного параметрического резонанса. Устойчив ли этот режим колебаний осциллятора по отношению к малым изменениям параметров системы?
11. Основной параметрический резонанс возможен не только тогда, когда период модуляции параметра равен половине собственного периода ($T = T_0/2$), но и в некотором интервале значений T в окрестности $T_0/2$. Из каких физических условий можно исходить при теоретическом расчете границ этого интервала параметрической неустойчивости?
12. Объясните характерный вид графиков и фазовых траекторий стационарных колебаний, происходящих на границах основного интервала параметрической неустойчивости.
13. Как ширина основного интервала параметрической неустойчивости зависит от глубины модуляции m момента инерции ротора (при $m \ll 1$)?
14. Как пороговое значение глубины модуляции m момента инерции ротора для параметрического резонанса второго порядка зависит от добротности осциллятора? Сравните с основным параметрическим резонансом.

Задания и порядок выполнения лабораторной работы

1. Начните работу с раздела «Теоретический обзор», в котором приведены краткие сведения об изучаемой физической системе, о соответствующей ей математической модели и о режимах ее поведения при разных значениях параметров.
 - Просмотрите последовательно все страницы этого раздела, запуская каждый раз (кнопкой «Пуск») моделирование соответствующих движений осциллятора.
 - В описании физической системы особое внимание обратите на то, как изменяется период собственных колебаний при изменении момента инерции ротора, и как изменяется угловая скорость ротора при принудительном перемещении грузов вдоль его стержня.

- Обратите внимание на фазовые соотношения между принудительными движениями грузов вдоль стержня и крутильными колебаниями ротора при настройке периода модуляции на основной резонанс.
 - В разделе «Условия резонанса» изучите диаграмму интервалов параметрической неустойчивости на плоскости $T - m$ (период модуляции – глубина модуляции). Построив диаграммы для разных значений добротности, исследуйте влияние трения на ширину интервалов.
 - В разделе «Электромагнитный аналог» внимательно проанализируйте сопоставление элементов механической системы аналогичным элементам колебательного контура. Обратите внимание на то, что модуляция момента инерции ротора радиальными перемещениями грузов аналогична модуляции индуктивности катушки вдвиганием и выдвиганием сердечника.
2. Изучите закономерности основного параметрического резонанса ($n = 1$), который возбуждается, когда два цикла модуляции параметра совершаются за один период собственных колебаний. Помните, что при работе с программой в любой момент можно получить контекстно-зависимую справку физического содержания, выбрав в меню пункт «Объяснение» либо «Помощь по физике».
- Начните с моделирования процесса параметрической раскачки в условиях основного резонанса при слабом трении. В панели ввода параметров задайте глубину модуляции порядка 15 – 20%, введите период внешнего воздействия $T = 0,5T_0$ и добротность порядка 18 – 20. Если осциллятор покоится в положении равновесия, то никакие изменения момента инерции ротора не смогут возбудить его колебаний. Поэтому для наблюдения параметрической раскачки нужно задать ненулевые начальные условия. Чтобы амплитуда колебаний стала расти сразу после начала моделирования, нужно задать (небольшое) начальное отклонение в любую сторону при нулевой начальной скорости.
 - Откройте раздел «Графики колебаний» и запустите моделирование. Обратите внимание, в какие моменты времени на графике угловой скорости появляются «зубрины». В промежутках между принудительными радиальными смещениями грузов ротор совершает затухающие собственные колебания. Объясните, почему при этом весь процесс выглядит как прогрессивный рост колебаний.
 - Перейдите в раздел «Фазовая траектория» и в панели «Условия моделирования» выберите опцию «Сечения Пуанкаре». Повторите моделирование сначала. Обратите внимание на формирование прогрессивно раскручивающейся фазовой спирали. Почему, несмотря на трение, амплитуда колебаний растет неограниченно? Изучите поведение кинетической, потенциальной и полной энергий в этом процессе, воспользовавшись разделом «Превращения энергии».
 - Выполните моделирование параметрических колебаний в условиях порога возбуждения основного резонанса (режим параметрической регенерации). Для заданной глубины модуляции m рассчитайте (и введите) пороговое значение добротности. Какие начальные условия обеспечат получение стационарных колебаний? Наблюдая графики и фазовую траекторию, методом проб и ошибок уточните пороговое значение добротности, обеспечивающее неизменность амплитуды. Исследуйте экспериментально устойчивость режима параметрической регенерации по отношению к малым изменениям параметров (добротности, периода и глубины модуляции) и начальных условий.
 - Добившись стационарных периодических колебаний в пороговом режиме, изучите их спектральный состав, открыв раздел программы «Спектр колебаний».
3. Изучите стационарные колебания на границах основного интервала параметрической неустойчивости в отсутствие трения.
- Для некоторого значения глубины модуляции попытайтесь рассчитать значения периода модуляции, соответствующие левой и правой границам интервала, используя необходимые формулы из учебного пособия. Рассчитайте также начальные условия, обеспечивающие получение стационарных колебаний для каждой из границ интервала. Введите соответствующие значения и наблюдайте моделирование, открыв раздел «Фазовая траектория».
 - Если рассчитанные Вами значения не обеспечивают стационарных колебаний, воспользуйтесь информацией, которая отображается в правой части панели ввода параметров (при изменении какого-либо параметра не забывайте нажимать кнопку «Обновить информацию»). Методом проб и ошибок попытайтесь улучшить приближенные теоретические оценки для границ основного интервала параметрического резонанса. Получив в эксперименте стационарные колебания, соответствующие каждой из границ интервала параметрической неустойчивости, объясните наблюдаемую форму графиков и фазовой траектории.
4. Повторите задания 2 и 3 для второго параметрического резонанса. Если возникнут затруднения, воспользуйтесь пунктом меню «Примеры», где Вы сможете найти краткое описание многих интересных режимов колебаний и запустить их моделирование, не выполняя самостоятельно предварительного (порой трудоемкого) расчета и ввода необходимых значений параметров.

5. Проверьте в моделирующем эксперименте Ваши теоретические решения тех задач из учебного пособия, которые были предложены Вам преподавателем в качестве индивидуального задания. Некоторые из предлагаемых в пособии задач требуют серьезного и весьма глубокого самостоятельного исследования и могут послужить темой для курсового проекта.
 - Введите необходимые значения параметров и выполните соответствующие эксперименты. Зарисуйте (или распечатайте на принтере) графики и фазовые диаграммы для включения в отчет.
 - Сопоставьте результаты экспериментов с Вашими теоретическими предсказаниями. Если обнаруживаются расхождения результатов расчета с экспериментом, обязательно попытайтесь установить причину расхождений. Результаты экспериментальной проверки Ваших решений включите в отчет о лабораторной работе.

После выполнения всех заданий подготовьте отчет о проделанной лабораторной работе, руководствуясь приведенными ниже «Требованиями к оформлению отчета».

Требования к оформлению отчета

Отчет о проделанной лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Титульный лист с указанием названия и номера лабораторной работы, фамилии и имени студента, номера учебной группы, даты выполнения работы и даты представления отчета.
2. Цель лабораторной работы с определением изучаемого физического явления и краткое описание моделируемой физической системы и ее математической модели.
3. Теоретический раздел с кратким изложением основных характеристик изучаемого явления, его места в классификации колебаний по разным признакам, и описанием математической модели физической системы, используемой для его изучения. В этом разделе должны быть приведены все основные формулы (связь параметров физической системы и ее математической модели, дифференциальное уравнение, описывающее систему, его общее решение, частные решения для наиболее важных и интересных случаев, уравнение фазовой траектории, выражения для разных видов энергии и их средних значений и т.п.). В этом разделе следует обязательно привести вывод тех формул, которые в учебном пособии приведены без вывода.
4. Ответы на вопросы для самоконтроля, которые сформулированы в «Методических рекомендациях» к данной лабораторной работе. Рекомендуется проиллюстрировать Ваши ответы соответствующими графиками или иными результатами моделирования (для тех вопросов, где это целесообразно).
5. Теоретическое решение задач из учебного пособия, предложенных Вам преподавателем в качестве индивидуального задания, и результаты самостоятельной проверки Ваших решений с помощью моделирующего эксперимента. В этом разделе нужно привести таблицы соответствующих измерений с обработкой результатов (для заданий, где такие измерения необходимы), графики и/или фазовые траектории (зарисовав их с экрана или распечатав на принтере, если есть такая возможность).