

# Баллистические снаряды и спутники

К пакету моделирующих программ «Движение космических тел»

Орбиты с различными направлениями начальных скоростей .....	1
Орбиты спутников, запущенных из одной точки с равными по модулю начальными скоростями .....	3
Орбиты спутников, запущенных из одной точки в одном направлении с разными по модулю начальными скоростями .....	4
Эволюция орбиты спутника в атмосфере .....	4

Программа «Баллистические снаряды и спутники» позволяет варьировать начальные условия запуска спутников или баллистических снарядов, выбирая положение начальной точки и величину и направление вектора начальной скорости. Можно заранее задать начальные условия сразу для нескольких тел, и затем наблюдать за их движением при одновременном либо последовательном запуске.

Подчеркнем, что при задании начальных условий мы указываем начальное положение и скорость только для участка *пассивного* орбитального движения спутника или баллистического снаряда. Во время подъема после старта и на участке разгона баллистический снаряд или космический корабль набирает скорость благодаря тяге ракетных двигателей. На этом так называемом *активном* этапе движения мы имеем дело еще не с искусственным небесным телом, а скорее с обычным реактивным снарядом. Вводимое в программе начальное положение соответствует конечной точке активного участка. В этом месте происходит выключение ракетного двигателя последней ступени. Начальная скорость для дальнейшего пассивного движения равна конечной скорости снаряда, достигнутой на активном участке разгона.

Пассивное движение происходит только под действием силы тяготения и, возможно, силы сопротивления воздуха. Для учета сопротивления воздуха при моделировании нужно выбрать соответствующую опцию в меню программы и ввести дополнительные параметры, характеризующие атмосферу планеты, массу и поперечное сечение снаряда или космического аппарата. Однако целесообразно начать изучение движения, рассматривая случаи, в которых сопротивление воздуха отсутствует либо его влияние незначительно.

Если начальная скорость пассивного движения направлена горизонтально (т.е. перпендикулярно радиусу-вектору в начальной точке), то начальная точка находится на одном из концов большой оси эллиптической орбиты: эта точка – перигей орбиты при начальной скорости, превышающей круговую скорость, и апогей – в противном случае. Большие оси всех орбит направлены вдоль вертикали, проходящей через начальную точку. Если же направленная горизонтально начальная скорость равна круговой скорости ( $v_0 = v_{кр}$ ), спутник будет двигаться по круговой орбите.

При любом другом направлении начальной скорости получить движение по круговой орбите невозможно, какой бы ни была величина начальной скорости. Точка старта – это единственная общая точка всех орбит. В этой точке все орбиты либо пересекаются, либо имеют общую касательную (если векторы скоростей для всех орбит в этой точке направлены одинаково). Если траектория пересекает поверхность Земли, то мы имеем дело с баллистическим снарядом, а не искусственным спутником Земли.

Подробное обсуждение моделирующих экспериментов, которые можно выполнить с помощью программы «Баллистические снаряды и спутники», приведено ниже для следующих частных случаев:

[Орбиты с различными направлениями начальных скоростей](#)

[Орбиты спутников, запущенных с равными по модулю начальными скоростями](#)

[Орбиты спутников, запущенных в одном направлении с различными по модулю начальными скоростями](#)

[Эволюция орбиты спутника в атмосфере](#)

## Орбиты с различными направлениями начальных скоростей

При горизонтальном направлении начальной скорости большая ось эллиптической орбиты спутника ориентирована вдоль местной вертикали начальной точки, т.е. в начальной точке находится либо перигей орбиты (при  $v_0 > v_{кр}$ ), либо апогей. Как изменится орбита спутника, если мы изменим направление начальной скорости? На следующем рисунке показаны орбиты нескольких спутников, запущенных из одной точки с одинаковыми по модулю, но разными по направлению начальными скоростями.

В начальной точке потенциальные энергии всех спутников одинаковы (для простоты будем считать, что массы всех спутников равны), и кинетические энергии также одинаковы, поскольку им сообщили равные по модулю скорости.

Следовательно, все рассматриваемые орбиты соответствуют одной и той же полной энергии, и потому имеют равные большие полуоси (см. [«Закономерности кеплеровых движений»](#)). В силу третьего закона Кеплера периоды обращения по всем таким орбитам равны. С помощью программы «Баллистические снаряды и спутники» это можно легко проверить в моделирующем эксперименте: все одновременно запущенные спутники также одновременно возвращаются в исходную точку.

В этом эксперименте величина начальной скорости выбрана большей, чем круговая скорость. Если начальную скорость направить горизонтально, начальная точка будет *перигеем* эллиптической орбиты. При любом другом направлении начальной скорости эллиптическая орбита будет иметь такую же длину большой оси, но *больший эксцентриситет*, чем при горизонтальном направлении начальной скорости такого же модуля. Отсюда легко заключить, что перигей любой орбиты будет ниже, чем при горизонтальном запуске. В самом деле, при заданной длине большой оси перигей тем ниже, чем больше эксцентриситет орбиты.

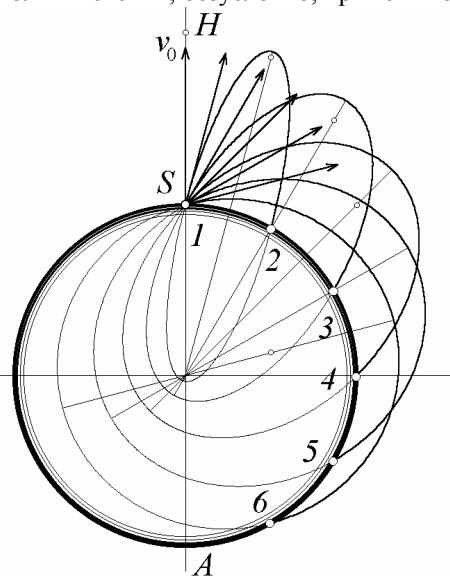
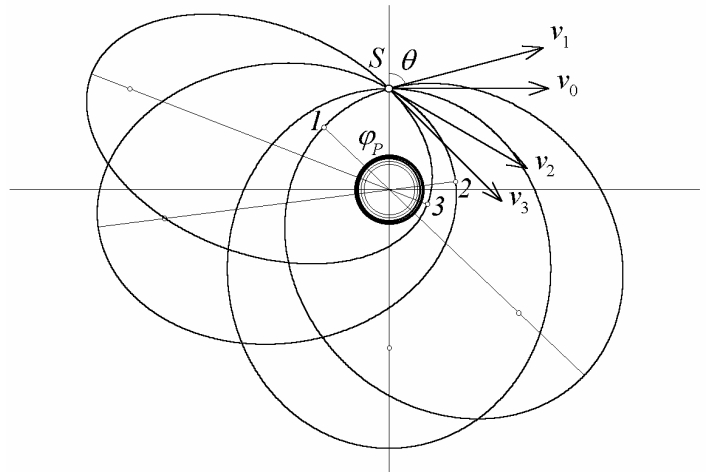
Если начальную скорость направить слегка вверх от горизонта (т.е. если скорость образует острый угол с местной вертикалью), перигей орбиты сместится из начальной точки назад на некоторый угол, в направлении, противоположном начальной скорости. Если же начальную скорость направить ниже горизонта, перигей орбиты сместится из начальной точки вперед, в направлении начальной скорости.

После запуска тела на орбиту мы получим искусственный спутник Земли только в том случае, когда расстояние от центра Земли до перигея превышает земной радиус. В противном случае тело будет двигаться по эллипсу только до тех пор, пока этот эллипс не пересечет поверхность Земли. В таких случаях запущенное тело называют обычно *баллистическим снарядом*, а не искусственным спутником Земли.

Последняя ситуация имеет место для любых запусков, в которых пассивное орбитальное движение начинается почти с самой поверхности Земли. Иначе говоря, невозможно запустить спутник непосредственно с поверхности Земли даже при отсутствии атмосферы, поскольку орбита результирующего движения неизбежно пересечет поверхность Земли. Только если скорость в начальной точке направлена горизонтально и ее величина больше круговой скорости, орбита не пересечет поверхность Земли, а лишь коснется ее в одной точке (а именно в начальной точке). Для планеты с атмосферой движение спутника по такой орбите тоже невозможно. В отсутствие атмосферы траектории баллистических снарядов представляют собой отрезки эллипсов, общий фокус которых расположен в центре Земли. Когда величина начальной скорости много меньше круговой скорости, отрезок такого эллипса над поверхностью Земли можно аппроксимировать параболой. Это и есть та самая параболическая траектория, которую мы обычно приписываем снаряду в приближении «плоской Земли» в отсутствие сопротивления воздуха. Для сравнительно малых начальных скоростей и, следовательно, небольших (по сравнению с радиусом Земли) дальностей полета, силу тяготения Земли можно считать неизменной по величине и направлению, и упомянутое приближение однородного поля тяготения, безусловно, применимо. Тем не менее, следует отдавать себе отчет в том, что на самом деле траектории – это отрезки сильно вытянутых эллипсов, один из фокусов которых находится в центре Земли.

На следующем рисунке представлено семейство траекторий баллистических снарядов, запущенных из одной точки поверхности Земли в различных направлениях с начальными скоростями, равными по модулю круговой скорости для нулевой высоты (т.е. скоростью для гипотетической круговой орбиты, стелющейся над самой поверхностью Земли). Отметим следующие интересные свойства этого семейства траекторий:

1. У всех эллипсов большие оси равны, так как всем траекториям соответствует одна и та же полная энергия.
2. Большая ось каждого эллипса ориентирована параллельно соответствующему вектору начальной скорости.
3. Один из фокусов каждого эллипса расположен в центре Земли, тогда как вторые фокусы лежат на окружности, центр которой совпадает с начальной точкой, а радиус равен радиусу Земли.



Перед началом моделирования программа отображает на экране теоретически предсказанные эллиптические траектории (вместе с их большими осями), если выбрана соответствующая опция. Действительная траектория, получающаяся в результате численного интегрирования уравнений движения, чертится на экране другим цветом. В отсутствие атмосферы траектории действительных движений точно совпадают с предсказанными эллиптическими кривыми, пока не происходит пересечения с поверхностью Земли. Обратите внимание на то, как точка падения снаряда на Землю отдалится от начальной точки по мере увеличения угла между направлением начальной скорости и местной вертикалью от  $0$  до  $\pi/2$ . В идеализированном случае полного отсутствия атмосферы место падения стремится к точке, диаметрально противоположной начальной точке, когда направление начальной скорости приближается к горизонту.

### Орбиты спутников, запущенных из одной точки с равными по модулю начальными скоростями

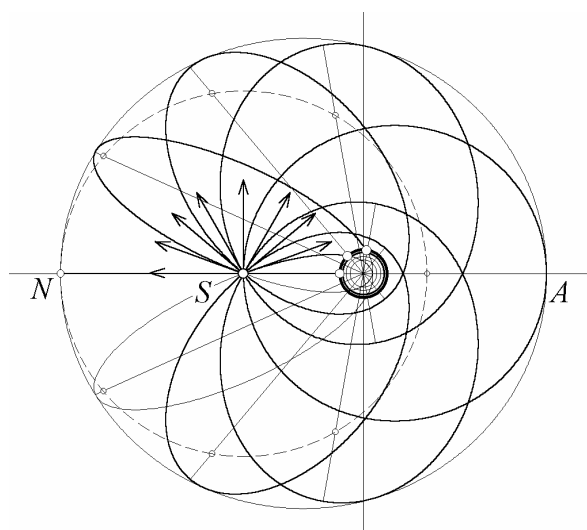
Представьте себе ракету, которая поднимается с Земли вертикально вверх, и в высшей точке своего подъема разрывается на множество осколков, разлетающихся во всевозможных направлениях с одинаковыми по модулю начальными скоростями. Дальнейшее движение осколков происходит только под действием силы земного тяготения. Если высота начальной точки велика по сравнению с радиусом Земли (или хотя бы такого же порядка), а начальная скорость осколков не слишком мала (не очень сильно отличается от круговой скорости для начальной высоты), то многие осколки становятся спутниками Земли и в дальнейшем обращаются по различным эллиптическим орбитам.

Программа «Баллистические снаряды и спутники» позволяет смоделировать движение таких осколков. Нужно ввести высоту начальной точки (в километрах или, что удобнее, в единицах радиуса Земли), и общую для всех тел величину начальной скорости. Начальную скорость также можно задавать либо в км/с, либо в естественных для данной задачи единицах, а именно, в единицах круговой скорости для заданной высоты начальной точки. Величина начальной скорости не должна превосходить скорости освобождения. Затем можно задать для нескольких тел различные направления начальной скорости. Вместо того, чтобы вводить необходимые для моделирования данные самостоятельно, можно выбрать соответствующий заранее заготовленный пример в пункте меню «Примеры».

Все эллиптические орбиты имеют общий фокус, расположенный в центре Земли. Вторые фокусы всех орбит лежат на окружности (в пространстве – на сфере), центр которой находится в начальной точке  $S$ , а радиус равен расстоянию  $SN$  от этой точки до точки  $N$  наибольшего удаления от центра Земли (точки  $N$  достигает осколок, начальная скорость которого в точке  $S$  направлена вертикально вверх). Эта окружность на рисунке показана штриховой линией. Легко доказать геометрически, что эта кривая – именно окружность. В самом деле, для любой эллиптической орбиты данного семейства сумма расстояний от каждой ее точки до фокусов имеет одно и то же значение, равное длине большой оси орбиты. Большие оси, как уже отмечалось выше, одинаковы у всех орбит и равны расстоянию от центра Земли до точки  $N$ , так как этот отрезок можно рассматривать как большую ось предельно сплюсненного (вырожденного) эллипса, соответствующего орбите осколка, вылетевшего из  $S$  вертикально вверх в направлении точки  $N$ . Все орбиты семейства проходят через точку  $S$ , и расстояние от нее до центра Земли, т.е. до одного из фокусов, для всех орбит одинаково. Поэтому расстояние от  $S$  до второго фокуса тоже одинаково для всех орбит семейства, что и означает, что вторые фокусы всех орбит семейства лежат на указанной выше окружности.

Семейство эллиптических орбит таких спутников также отличается рядом интересных свойств. Всем орбитам рассматриваемого семейства соответствуют равные значения полной энергии (в расчете на единицу массы), так как в начальной точке потенциальные энергии всех осколков равны, а при одинаковых начальных скоростях будут равны и кинетические энергии. Большая ось кеплеровой орбиты однозначно связана с энергией. Поэтому большие оси всех эллипсов равны. В соответствии с третьим законом Кеплера, у всех спутников такого семейства будут одинаковы и периоды обращения. Это значит, что все они одновременно возвратятся в начальную точку  $S$ . Исключение составляют лишь те осколки, траектории которых пересекают поверхность Земли – им не суждено осуществить и одного полного оборота по орбите.

Движение всех осколков происходит в ограниченной области пространства. Граница этой области обладает осевой симметрией, т.е. представляет собой поверхность вращения некоторой кривой вокруг оси, проходящей через центр Земли и начальную точку. В каждой своей точке она касается одной из возможных траекторий, т.е. является *огibaющей* для рассматриваемого семейства эллипсов. Можно доказать (мы

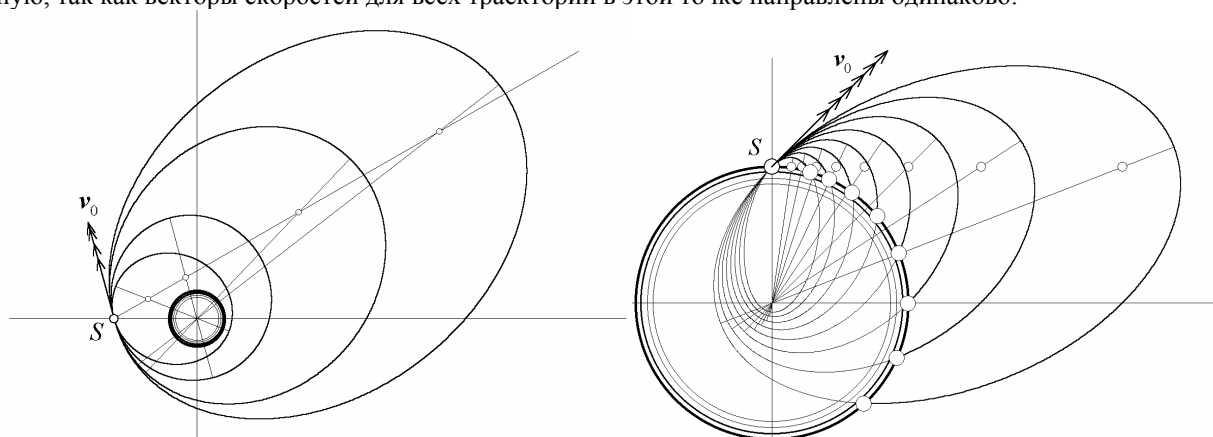


предлагаем сделать это в качестве самостоятельного упражнения), что огибающая семейства эллиптических орбит представляет собой эллипс, один из фокусов которого находится в центре Земли, а второй – в общей для всех орбит начальной точке  $S$  (см. также «Закономерности кеплеровых движений»). Большая ось этого эллипса простирается от точки  $N$  (наиболее удаленной от центра Земли точки области, в которой движутся осколки, см. рисунок) до точки области движения осколков, наиболее удаленной от начальной точки  $S$ . Этой точки достигает тот осколок, который вылетел из начальной точки  $S$  в горизонтальном направлении (перпендикулярно радиусу-вектору). Его эллиптическая орбита в своем апогее касается границы рассматриваемой области.

### Орбиты спутников, запущенных из одной точки в одном направлении с разными по модулю начальными скоростями

Рассмотрим свойства кеплеровых орбит, по которым движутся спутники, запускаемые из одной и той же точки над поверхностью Земли в одном и том же направлении, но с различными по величине начальными скоростями. Если начальная скорость направлена горизонтально (т.е. перпендикулярно радиусу-вектору в начальной точке), то начальная точка находится на одном из концов большой оси эллиптической орбиты: эта точка – перигей орбиты при начальной скорости, превышающей круговую скорость, и апогей – в противном случае. Большие оси всех орбит направлены вдоль вертикали, проходящей через начальную точку. Если же направленная горизонтально начальная скорость равна круговой скорости ( $v_0 = v_{кр}$ ), спутник будет двигаться по круговой орбите.

При любом другом направлении начальной скорости получить движение по круговой орбите невозможно, какой бы ни была величина начальной скорости. На следующем рисунке слева показано несколько орбит спутников, а справа – семейство эллиптических траекторий баллистических снарядов, которым разные по модулю начальные скорости сообщаются под одним и тем же острым углом с вертикалью. Точка старта  $S$  – это единственная общая точка всех эллипсов. В этой точке все кривые имеют общую касательную, так как векторы скоростей для всех траекторий в этой точке направлены одинаково.



Интересное свойство семейства таких эллиптических орбит связано с положениями их фокусов. Один из фокусов – общий для всех орбит. Он расположен в силовом центре, т.е. в центре Земли. Что касается вторых фокусов всех орбит, то, как видно из рисунка, все они расположены на одной и той же прямой, проходящей через общую для всех орбит начальную точку  $S$ . Эта прямая образует угол с вертикалью (проходящей через точку  $S$  вверх), который вдвое больше угла, образуемого начальной скоростью с вертикалью. Заметим кстати, что в случае горизонтального направления начальных скоростей, когда  $v_0$  образует угол 90 градусов с вертикалью, для прямой вторых фокусов этот угол равен 180 градусов, т.е. вторые фокусы всех эллипсов лежат на прямой, проходящей вертикально вниз через начальную точку. Это уже отмечалось выше.

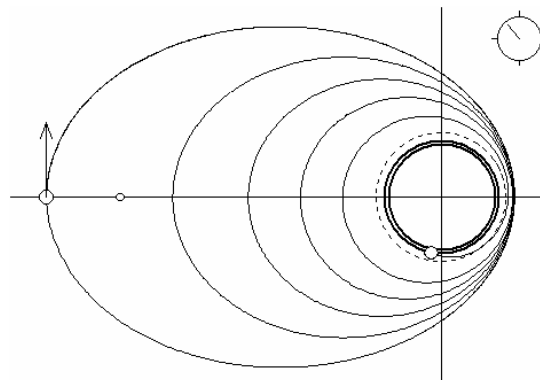
Указанное выше свойство рассматриваемого семейства эллиптических орбит легко объяснить, если вспомнить хорошо известное «оптическое» свойство эллипса: все лучи, выходящие из одного фокуса эллиптического зеркала, после отражения проходят через второй его фокус, т.е. отражаются эллиптическим зеркалом в направлении второго фокуса зеркала. Воображаемый луч света, выходящий из центра Земли (общего фокуса всех эллипсов), отразился бы в точке  $S$  касания эллипсов от всех эллипсов в одном и том же направлении. Так как он непременно должен пройти через второй фокус, то вторые фокусы всех рассматриваемых эллипсов лежат на этом отраженном луче. Учитывая, что угол отражения равен углу падения, получаем отмеченное выше соотношение между направлением этого луча и направлением начальных скоростей.

### Эволюция орбиты спутника в атмосфере

Соппротивление воздуха добавляется к силе тяготения в тех случаях, когда спутник движется по орбите, проходящей через атмосферу планеты. Программа «Баллистические снаряды и спутники» позволяет про-

следить эволюцию орбиты спутника под влиянием атмосферы. Если, например, первоначально орбита представляет собой сильно вытянутый эллипс, перигей которого попадает в верхние слои атмосферы, спутник в течение короткого времени движется сквозь разреженный воздух каждый раз, когда он проходит через перигей своей орбиты. Из-за сопротивления воздуха спутник в очередной раз «выныривает» из атмосферы с чуть меньшей скоростью, чем при входе в нее.

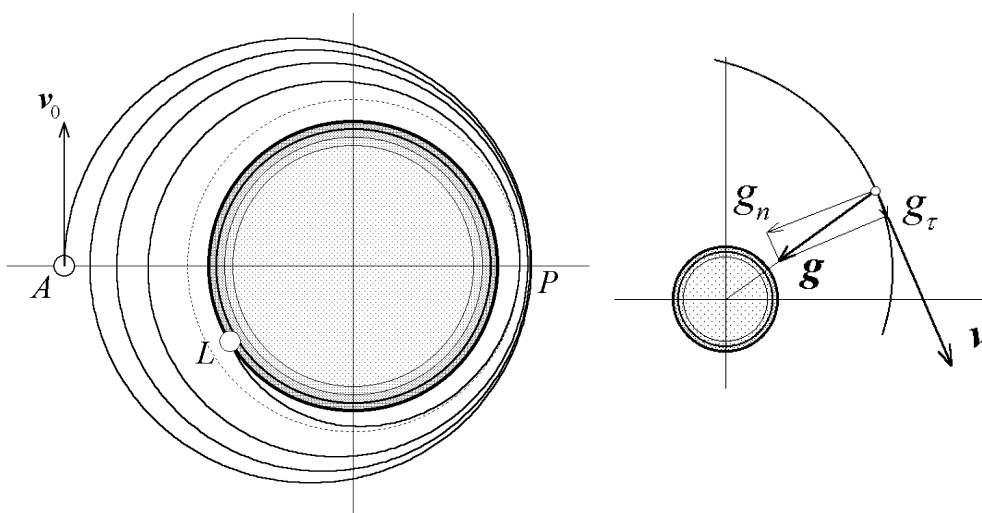
В качестве первого приближения можно считать, что спутник движется по кеплерову эллипсу только под действием силы тяготения, и что он испытывает сопротивление воздуха только в одной точке орбиты, как если бы при проходе через перигей он «протыкал» невидимую тонкую стенку. Таким образом, при каждом проходе через перигей скорость спутника немного уменьшается. Такое почти мгновенное уменьшение скорости в перигее влияет в первую очередь на высоту апогея орбиты и почти не сказывается на высоте перигея. Поэтому ориентация большой оси эллиптической орбиты остается почти неизменной, но размер большой оси уменьшается с каждым оборотом спутника. Чем ниже перигей орбиты, тем значительнее этот эффект.



На самом деле сопротивление воздуха действует на спутник не в одной точке орбиты, а скорее на протяжении некоторого участка траектории в окрестности перигея. В результате высота перигея также уменьшается с каждым витком орбиты, хотя снижение апогея происходит значительно быстрее – торможение вблизи перигея прежде всего влияет на апогей, где спутник практически не испытывает сопротивления атмосферы. По мере уменьшения большой оси орбиты период обращения также уменьшается. Форма орбиты постепенно приближается к круговой.

Когда орбита становится почти круговой, спутник испытывает сопротивление воздуха вдоль всей траектории. Рассеяние механической энергии, вызванное сопротивлением воздуха, приводит к постепенному снижению траектории с каждым оборотом. В действительности траектория представляет собой не замкнутую окружность, а постепенно скручивающуюся спираль. Когда траектория снижается до плотных слоев атмосферы, сопротивление воздуха резко возрастает, и спутник уже не может завершить очередной виток орбиты. Приводимый здесь рисунок иллюстрирует последнюю стадию эволюции орбиты. Чтобы было легче наблюдать за изменениями траектории, эффекты сопротивления воздуха при моделировании сильно преувеличены. В действительности для планеты с атмосферой земного типа первоначальное снижение траектории спутника из-за сопротивления воздуха происходит довольно медленно в виде почти круговых витков.

Рассматривая последовательные витки снижающейся траектории спутника как окружности с уменьшающимся радиусом, мы приходим к заключению, что орбитальная скорость спутника возрастает с каждым оборотом. Оказывается, что благодаря сопротивлению воздуха спутник ускоряется в направлении своего движения, как если бы сила сопротивления толкала его вперед, а не тормозила движение. Это неожиданное заключение, основанное на законах динамики, получило название *аэродинамического парадокса спутника*.



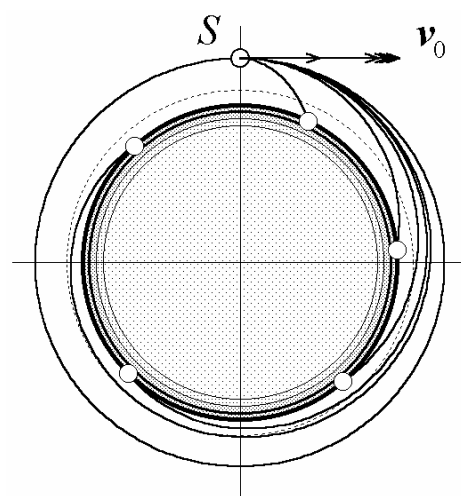
Однако в этом явлении нет никакой мистики. Полное ускорение спутника равно векторной сумме гравитационного ускорения  $g$ , направленного к центру Земли, и ускорения, создаваемого силой сопротивления воздуха. Это ускорение направлено противоположно вектору скорости. Действительное движение спутника происходит не по окружности, а по слабо скручивающейся спирали. Поэтому нормаль к траектории направлена не к центру Земли, а проходит чуть-чуть позади центра. Это значит, что направленная к центру

Земли сила тяготения имеет не только нормальную к траектории составляющую, но и очень небольшую составляющую, направленную вперед по касательной к спиралевидной траектории спутника. Поэтому и вектор гравитационного ускорения  $g$  имеет небольшую тангенциальную составляющую, направленную вперед. Эта составляющая показана на рисунке справа в сильно преувеличенном виде. По модулю это ускорение больше направленного назад ускорения, создаваемого силой сопротивления воздуха, и, несмотря на сопротивление воздуха, скорость снижающегося спутника растет под действием силы тяготения Земли.

Таким образом, благодаря сопротивлению атмосферы скорость спутника не уменьшается, а понемногу возрастает. Здесь нет никакого противоречия с законом сохранения энергии. Полная механическая энергия системы из-за трения понемногу убывает. Рост кинетической энергии, как и рассеяние механической энергии благодаря трению, происходит за счет уменьшения гравитационной потенциальной энергии системы. В самом деле, при движении по круговой орбите в ньютоновском гравитационном поле (отрицательная потенциальная энергия по модулю вдвое больше кинетической энергии).

Благодаря сопротивлению воздуха баллистический снаряд, запущенный в горизонтальном направлении, может упасть на поверхность Земли в другом полушарии. Подчеркнем, что это принципиально невозможно при отсутствии атмосферы. Подобная ситуация иллюстрируется следующим полученным в результате моделирования рисунком, напоминающим знаменитую пророческую иллюстрацию из одной популярной книги Ньютона.

Орудие на очень высокой горе, вершина которой вздымается над атмосферой, выстреливает одно ядро за другим в горизонтальном направлении. Первое ядро падает у подножия горы. Второму ядру орудие сообщает большую начальную скорость, и оно огибает часть земного шара, прежде чем падает на Землю. И, наконец, ядро выстреливают со скоростью, достаточной для того, чтобы оно двигалось по орбите вокруг Земли. Из этого рисунка можно заключить, что Ньютон первым навел мост между знакомыми повседневными явлениями на Земле и загадочными движениями небесных тел. Заглядывая вперед много дальше своих знаменитых предшественников Галилея и Кеплера, Ньютон пришел к заключению, что движения земного пушечного ядра и небесных тел управляются теми же самыми всеобщими законами физики. И по этому же рисунку можно судить о том, что Ньютон уже в те времена предвидел, что человек рано или поздно сможет запустить искусственный спутник Земли!



В моделирующей программе предполагается, что сила сопротивления воздуха пропорциональна локальной плотности атмосферы и квадрату скорости спутника, и направлена противоположно скорости спутника. Такие предположения оправданы для тел наподобие искусственных спутников сферической формы в атмосфере, движущихся в газовой среде со скоростями, превышающими характерные скорости теплового движения молекул газа. В программе принимается, что плотность воздуха  $\rho$  экспоненциально уменьшается с высотой  $h$  над поверхностью планеты:

$$\rho(h) = \rho(0) \exp(-h/H),$$

где  $H$  – характеристическая высота, на которой плотность атмосферы в  $e = 2.72$  раза меньше, чем у поверхности. Такое выражение для зависимости плотности от высоты  $\rho(h)$  приближенно справедливо, когда характеристическая высота  $H$  атмосферы мала по сравнению с радиусом  $R$  планеты. Это условие выполняется для земной атмосферы и атмосфер других планет Солнечной системы. Экспоненциальный характер этой зависимости означает, что плотность воздуха уменьшается с высотой очень быстро. Но все же на высотах вплоть до 160 км плотность воздуха такова, что спутник не может находиться на орбите в течение продолжительного времени. Чем выше орбита, тем дольше спутник остается на ней. Для самых верхних слоев экспоненциальная модель атмосферы верна лишь приближенно. На больших высотах плотность воздуха очень сильно зависит от температуры и условий солнечного освещения. Плотность воздуха на данной высоте заметно изменяется на протяжении суток (с 24-часовым периодом): днем под действием солнечных лучей атмосфера как бы «вспухает» и плотность воздуха на данной высоте увеличивается. На высоте 350 км на поверхность Земли плотность атмосферы днем приблизительно в 1,2 раза больше, чем ночью, а на высоте 500 км – уже примерно второе больше.

В моделирующей программе эти изменения плотности воздуха в зависимости от солнечного освещения во внимание не принимаются, и зависимость плотности от высоты везде считается одинаковой. Характеристическая высота атмосферы задается параметром  $H$ , величину которого можно изменять в широких пределах. Например, Вы можете задавать преувеличенно большие значения  $H$  для того, чтобы сделать влияние сопротивления воздуха более заметным, чем в реальных условиях. Такого рода моделирующие эксперименты помогут лучше понять роль сопротивления атмосферы для космических полетов вокруг Земли или других планет.

Испытываемая спутником сила сопротивления воздуха пропорциональна местной плотности атмосферы, квадрату геоцентрической скорости спутника и площади его поперечного сечения. Она зависит также от формы спутника. Ускорение спутника, создаваемое силой сопротивления, обратно пропорционально массе спутника. Таким образом, это ускорение можно выразить следующей формулой:

$$\mathbf{a} = -C\rho(h) \mathbf{v}\mathbf{v},$$

где коэффициент  $C$  пропорционален площади поперечного сечения спутника и обратно пропорционален его массе. Он особенно велик для легких, полых спутников в виде наполненных газом баллонов. Такие спутники в гораздо большей мере подвержены влиянию сопротивления атмосферы (как и давлению солнечного излучения) по сравнению с массивными компактными телами. Поэтому их используют для экспериментальных исследований верхней атмосферы.

Второй параметр, который нужно вводить при моделировании движения в условиях сопротивления воздуха – это безразмерный коэффициент, равный отношению ускорения, обусловленного сопротивлением воздуха при движении спутника в атмосфере на высоте  $h = 0$  (вблизи поверхности Земли) со скоростью, равной круговой скорости для  $h = 0$ , к ускорению, создаваемому силой тяжести (к ускорению свободного падения). Этот безразмерный параметр зависит как от плотности атмосферы вблизи поверхности планеты, так и от характеристик самого спутника (от его массы и от площади его поперечного сечения). Моделирующая программа позволяет сравнить влияние атмосферы на спутники с различными значениями отношения массы к площади поперечного сечения, запуская сразу несколько таких спутников из одной точки с одинаковой скоростью.

Программа «Баллистические снаряды и спутники» позволяет сравнить также действительное движение спутника или баллистического снаряда при наличии сопротивления воздуха с соответствующим невозмущенным движением, происходящим под действием только силы тяготения. В любой момент во время моделирования Вы можете заставить программу изобразить на экране эллипс, вдоль которого снаряд продолжал бы дальнейшее движение в отсутствие сопротивления воздуха, начиная с данного момента. Положение и скорость снаряда в этот момент используются как начальные условия для расчета дальнейшего невозмущенного движения. Чтобы включить такую возможность, перед началом моделирования нужно выбрать в меню опцию «Невозмущенная траектория». Когда этот пункт меню отмечен «галочкой», программа строит эллипс невозмущенного движения каждый раз, когда при моделировании Вы нажимаете кнопку «Пауза». При возобновлении моделирования после того, как этот эллипс будет выведен на экран, отличие действительного движения с сопротивлением воздуха от невозмущенного кеплерова движения становится отчетливо видимым.