

Осциллятор с сухим трением

II. Вынужденные колебания на нерезонансных частотах

Аннотация

В статье аналитически и с помощью компьютерного моделирования исследуются вынужденные колебания механического осциллятора с сухим трением при синусоидальном возбуждении на нерезонансных частотах. В общем случае в результате переходного процесса сухое трение (как и вязкое трение) приводит к режиму установившихся колебаний — предельному циклу — характеристики которого не зависят от начальных условий. Однако интересные особенности отклика осциллятора с сухим трением обнаруживаются при его возбуждении на субгармонических частотах $\omega = \omega_0/n$. В частности, при одних и тех же параметрах системы сосуществует множество режимов асимметричных колебаний, зависящих от начальных условий.

Ключевые слова: сухое трение, вынужденные колебания, синусоидальное возбуждение, субрезонансное возбуждение, порог возбуждения

1 Модель и дифференциальное уравнение системы

Для изучения вынужденных колебаний торсионного пружинного осциллятора с сухим трением используется та же модель, что и в первой части этой статьи [1], где рассматривались собственные и резонансные вынужденные колебания. Подвижная часть осциллятора представляет собой уравновешенный маховик (ротор), центр масс которого расположен на оси вращения (рис. 1). При повороте маховика происходит закручивание прикрепленной к нему спиральной пружины.

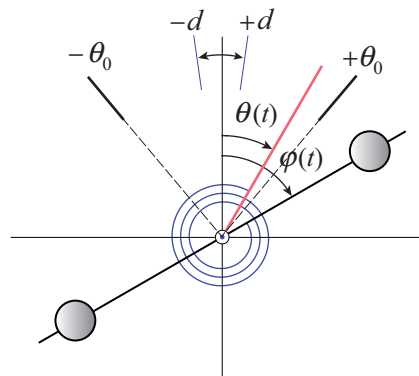


Рис. 1: Схема устройства механического торсионного осциллятора с сухим трением

Другой конец пружины прикреплен к стержню (шатуну), который под действием внешней силы может поворачиваться вправо-влево на некоторый угол вокруг общей с маховиком оси. Ротор находится в равновесии (пружина не напряжена), когда стержень ротора параллелен шатуну. При повороте шатуна или ротора на маховик со стороны пружины действует возвращающий момент сил, который, согласно закону Гука, пропорционален углу закручивания пружины, т. е. углу отклонения ротора от положения шатуна.

Вынужденные колебания в рассматриваемой системе происходят, когда возбуждающий шатун принудительно поворачивают вправо-влево относительно среднего положения $\theta = 0$ по синусоидальному закону между углами $-\theta_0$ и θ_0 (см. рис. 1): $\theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$. Такой кинематический способ возбуждения особенно удобен для моделирования, потому что движение возбуждающего шатуна можно наблюдать одновременно с колебаниями маховика.

Для сухого трения используется упрощенная модель, основанная на приближенном законе Кулона — Амонтона: при движении сила трения постоянна по модулю, но ее направление изменяется

всякий раз при изменении направления скорости. В состоянии покоя момент силы статического трения, действующий на ось ротора, может принимать любое значение от $-N_{\max}$ до N_{\max} . Величина момента силы трения скольжения принимается в этой модели равной максимально возможной величине момента силы трения покоя N_{\max} .

По обе стороны от положения равновесия (в котором спиральная пружина не деформирована) имеется интервал углов отклонения ротора, называемый зоной застоя или мертвой зоной. В пределах зоны застоя трение покоя в состоянии уравновесить силу натяжения деформированной пружины. Границы зоны застоя $-d$ и d (рис. 1) определяются максимальным значением момента силы трения покоя N_{\max} .

В случае идеализированной z-характеристики система описывается следующими дифференциальными уравнениями для угла отклонения ротора $\varphi(t)$:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2(\varphi + d) = \omega_0^2\theta_0 \sin \omega t \quad \text{при } \dot{\varphi} > 0, \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2(\varphi - d) = \omega_0^2\theta_0 \sin \omega t \quad \text{при } \dot{\varphi} < 0. \quad (2)$$

Частота ω_0 характеризует собственные колебания ротора в отсутствие затухания. Постоянная затухания γ служит мерой интенсивности вязкого трения в системе. Вместо постоянной затухания удобно использовать обратную ей безразмерную величину $Q = \omega_0/2\gamma$, называемую добротностью осциллятора.

Нелинейный характер рассматриваемой задачи проявляется в том, что нужно переходить от одного из линейных уравнений (1)–(2) к другому всякий раз, когда изменяется направление вращения ротора.

2 Нерезонансные вынужденные колебания осциллятора с сухим трением

Как было показано в первой части [1], при точной настройке в резонанс сухое трение, в отличие от вязкого трения, не в состоянии ограничить рост амплитуды вынужденных колебаний осциллятора: если превзойден порог резонансного возбуждения, установившиеся колебания без вязкого трения невозможны. При нерезонансном возбуждении ($\omega \neq \omega_0$) системы с сухим трением, после переходного процесса конечной продолжительности, возможно установление стационарных колебаний неизменной амплитуды даже в отсутствие вязкого трения.

2.1 Амплитудно-частотные характеристики установившихся колебаний

Нерезонансным вынужденным колебаниям осциллятора с сухим трением уделено значительное внимание в научной литературе. После пионерской работы Ден Хартога 1930 года [2], многие исследователи изучали эту систему аналитически и численно [3]–[7], и получили для гармонически возбуждаемого осциллятора с сухим трением точные решения, описывающие установившийся режим стационарных колебаний без «залипаний» (остановок конечной длительности) с двумя точками поворота на протяжении каждого цикла возбуждения.

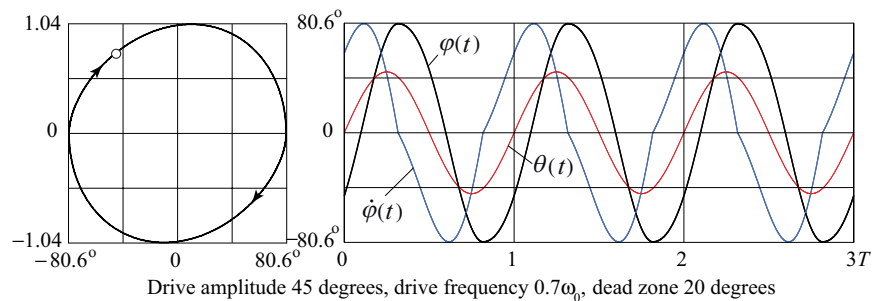


Рис. 2: Фазовая траектория и графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для установившихся колебаний без «залипаний» для осциллятора с сухим трением при $\omega = 0.7\omega_0$.

Пример таких нерезонансных колебаний осциллятора со сравнительно сильным сухим трением показан на рис. 2. Фазовая траектория и графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ получены с помощью компьютерного моделирования [9], основанного на численном интегрировании уравнений (1)–(2). Каждый период вынужденного установившегося движения ротора, происходящего без «залипаний», состоит из двух фаз равной длительности $T/2$ ($T = 2\pi/\omega$ – период возбуждения). На всем протяжении одной из этих фаз угловая скорость отрицательна, и положительна на протяжении второй фазы. К сожалению, не представляется возможным записать $\varphi(t)$ в замкнутой аналитической форме, потому что положение точек поворота, разделяющих период колебаний на две фазы, определяется трансцендентным уравнением. Для нахождения амплитуды $a(\omega)$ таких симметричных колебаний достаточно рассмотреть только одну из фаз вращения ротора в одном направлении между соседними точками поворота, например ту, что описывается дифференциальным уравнением (2). Используя периодичность и симметрию искомого решения, можно получить в аналитической форме следующую зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты возбуждения ω и амплитуды θ_0 возбуждающего шатуна:

$$a(\omega) = \theta_0 \sqrt{\frac{1}{(1 - \omega^2/\omega_0^2)} - \frac{d^2(\omega_0/\omega)^2 \sin^2 \pi(\omega_0/\omega)}{\theta_0^2(\cos \pi(\omega_0/\omega) + 1)^2}}. \quad (3)$$

Для частоты возбуждения $\omega = 0.7\omega_0$, амплитуды возбуждения $\theta_0 = 45^\circ$ и ширины мертвой зоны $d = 20^\circ$ выражение (3) дает значение 80.63° , которое находится в полном согласии с результатами компьютерного моделирования, показанными на рис. 2.

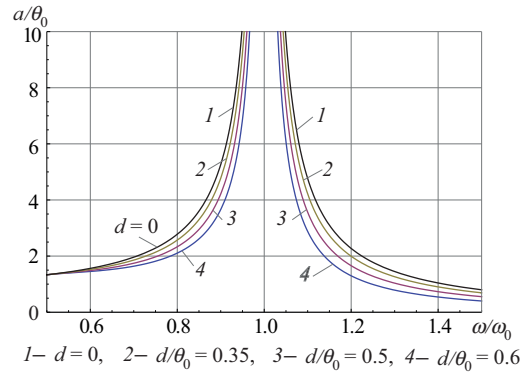


Рис. 3: Амплитудно-частотные характеристики осциллятора с сухим трением при синусоидальном возбуждении

Резонансные кривые (амплитудно-частотные характеристики) для осциллятора с сухим трением при синусоидальном возбуждении, определяемые выражением (3), приведены на рис. 3 для нескольких значений относительной ширины d/θ_0 зоны застоя (в области частот возбуждения $\omega \geq 0.5\omega_0$). Обращаем внимание на то, что формула (3) для $\omega = 0.5\omega_0$ дает одинаковое значение амплитуды установившихся колебаний $a(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}\theta_0$ при любых значениях ширины зоны застоя, в том числе при $d = 0^\circ$, т. е. при полном отсутствии трения.

2.2 Условия существования нерезонансных колебаний без «залипаний»

Подчеркнем, что выражение (3), как и резонансные кривые на рис. 3, справедливы для симметричных вынужденных колебаний осциллятора с сухим трением, происходящих без «залипаний». Такие колебания возможны только при выполнении следующего простого неявного условия (см. [3]) на значения параметров системы:

$$a(\omega, \theta_0, d) \geq \frac{d}{\theta_0} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2. \quad (4)$$

где $a(\omega)$ дается выражением (3). Решая численно уравнение (4) относительно неизвестного d при $\omega = 0.7\omega_0$ и $\theta_0 = 45^\circ$ (такие значения параметров использовались при моделировании, результаты

которого показаны на рис. 2), получаем, что для данных параметров максимальная ширина мертвой зоны, при которой возможны стационарные вынужденные колебания без «залипаний», равна 32.5° .

В явной форме формула для области параметров, в которой возможны установившиеся вынужденные колебания без «залипаний», была впервые получена в работе [4]. Она дает минимальное значение $(\theta_0)_{\min}$ амплитуды возбуждающего внешнего момента, необходимой для предотвращения «залипаний» при данной ширине d зоны застоя и данной частоте возбуждения ω :

$$(\theta_0)_{\min} = d \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 \left[1 + \frac{(\omega/\omega_0)^2 \sin^2(\pi\omega_0/\omega)}{(1 + \cos(\pi\omega_0/\omega))^2}\right]}. \quad (5)$$

Разумеется, этой формулой также можно воспользоваться для нахождения максимальной ширины d_{\max} мертвой зоны, при которой еще возможны установившиеся вынужденные колебания ротора без «залипаний» для заданных значений частоты ω и амплитуды θ_0 возбуждающего шатуна. Подставляя $\omega = 0.7\omega_0$ и $\theta_0 = 45^\circ$ в выражение (5), получаем $d_{\max} = 32.5^\circ$. Это значение полностью согласуется с приведенной выше численной оценкой, полученной из неявного условия (4).

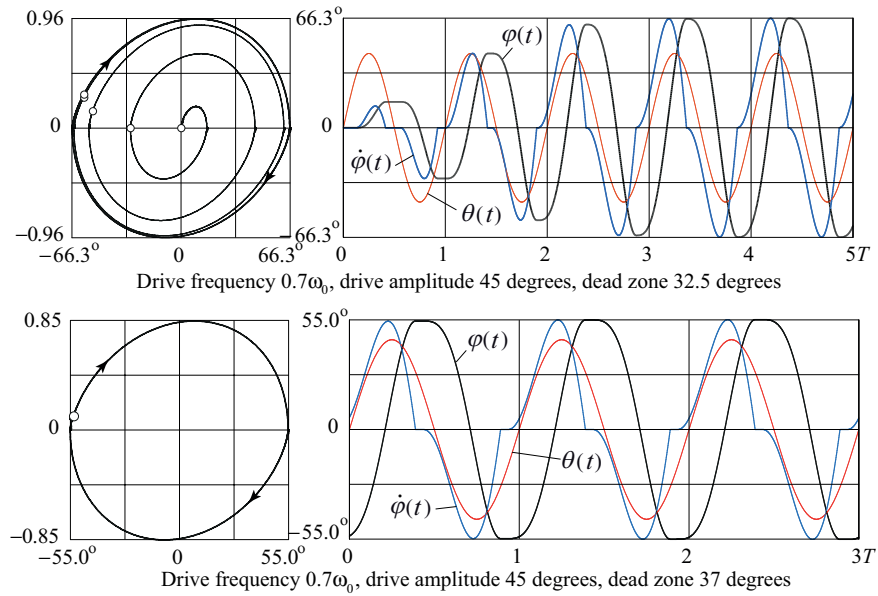


Рис. 4: Фазовая траектория и графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для переходного процесса, который приводит к режиму установившихся колебаний без залипаний при $\omega = 0.7\omega_0$ и критической ширине $d = 32.5^\circ$ зоны застоя (верхняя часть рисунка) и установившиеся симметричные колебания с залипаниями при $d = 37^\circ$ (нижняя часть рисунка).

Верхняя часть рис. 4 иллюстрирует колебания, которые происходят на рассматриваемом пределе такого режима вынужденных колебаний без залипаний (ширина мертвой зоны 32.5°). При нулевых начальных условиях ($\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$) в течение короткого переходного процесса происходит несколько залипаний ротора (остановок конечной длительности). Этот переходный процесс заканчивается стационарным режимом симметричных установившихся колебаний, происходящих без залипаний. Согласно выражению (3), амплитуда таких колебаний должна составлять 66.3° , что хорошо согласуется с результатами численного моделирования.

Для сравнения, в нижней части рис. 4 показаны стационарные колебания осциллятора при тех же значениях частоты и амплитуды возбуждающего шатуна ($\omega = 0.7\omega_0$ и $\theta_0 = 45^\circ$), но при несколько более сильном сухом трении (мертвая зона 37°). При таких параметрах залипание происходит дважды на протяжении каждого цикла возбуждения. Естественно, что при этом амплитуда устано-

вившихся симметричных вынужденных колебаний, наблюдаемая при моделировании, оказывается меньше значения, предсказываемого выражением (3): 55° по сравнению с 62° .

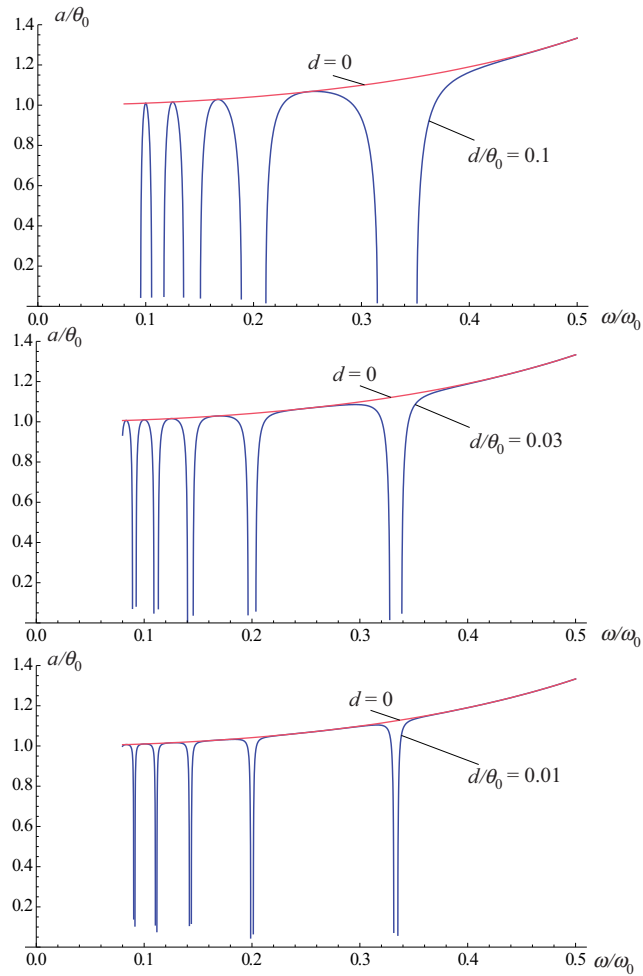


Рис. 5: Амплитудно-частотные характеристики осциллятора с сухим трением, рассчитанные на основе выражения (3) для частот возбуждения $\omega < \omega_0/2$ при нескольких значениях относительной ширины мертвой зоны ($d/\theta_0 = 0.1$, $d/\theta_0 = 0.03$, $d/\theta_0 = 0.01$)

3 Синусоидальное возбуждение осциллятора на субрезонансных частотах

Характеристики установившегося режима вынужденных колебаний, возбуждаемых периодическим внешним воздействием в случае осциллятора с сухим трением, как и в случае осциллятора с вязким трением, в общем случае однозначно определяются параметрами системы (собственной частотой, добротностью, шириной зоны застоя), а также частотой и амплитудой внешнего воздействия, и не зависят от начальных условий. Однако у осциллятора с сухим трением некоторые особенности установившегося режима (в частности, зависимость от начальных условий) проявляются, когда частота синусоидального возбуждения совпадает с частотой одной из субгармоник собственных колебаний, т. е. при $\omega = \omega_0/n$, где n — целое число.

Аналитические решения задачи о вынужденных колебаниях осциллятора с сухим трением при субгармоническом возбуждении впервые были получены в работе [8]. В данной статье мы предлагаем более простой и физически более прозрачный подход к решению этой задачи, и детально обсуждаем особенности таких колебаний. Полученные ниже сравнительно простые решения, до-

пускающие представление в конечной форме, иллюстрируются фазовыми траекториями и графиками зависимости от времени для угла отклонения и угловой скорости, полученными в результате компьютерного моделирования.

3.1 Асимметричные режимы субрезонансных установившихся колебаний

Согласно выражению (3), при частотах возбуждения $\omega = \omega_0/2, \omega = \omega_0/4, \dots$ амплитуда установившихся симметричных колебаний, происходящих без залипаний, при любой ширине d зоны застоя должна быть равна амплитуде вынужденных стационарных колебаний в отсутствие трения, т. е. при $d = 0$: $a(\omega) = \theta_0/(1 - \omega^2/\omega_0^2)$. Разумеется, это произвольное значение d не должно быть слишком большим, т. е. оно должно удовлетворять условию (5), при выполнении которого возможны установившиеся колебания без залипаний. При субрезонансной частоте возбуждения $\omega = \omega_0/n$ условие (5) дает $d \leq \theta_0/3$.

Из рисунка 5 видно, что амплитудно-частотные характеристики для разных значений d при $\omega = \omega_0/2n$ касаются резонансной кривой, соответствующей $d = 0$. Компьютерное моделирование показывает, что в этих случаях установившиеся вынужденные колебания, вообще говоря, асимметричны: максимальное угловое отклонение в одну сторону больше, чем в другую. Это значит, что при $\omega = \omega_0/2n$ можно ожидать существования аналитических решений специального вида. Ниже будет показано, что, в противоположность общему случаю вынужденных колебаний, для которого характерно установление периодического режима при любых начальных условиях, описываемого единственным решением соответствующего дифференциального уравнения, при субрезонансных частотах возбуждения $\omega = \omega_0/2n$ существует целый континуум асимметричных колебаний без залипаний. Каждому такому решению соответствует предельный цикл (аттрактор), к которому приводит переходный процесс, начинающийся в определенной области начальных состояний $(\varphi(0), \dot{\varphi}(0))$. Эта область образует бассейн притяжения данного аттрактора.

Для изучения установившихся режимов при возбуждении осциллятора на частотах $\omega = \omega_0/n$ удобно в качестве начала отсчета времени $t = 0$ выбрать момент, когда возбуждающий шатун достигает своего максимального отклонения θ_0 . Другими словами, удобно считать, что зависимость углового положения шатуна от времени $\theta(t)$ описывается выражением $\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$. При таком выборе, как мы увидим, в установившемся движении точки поворота маховика приблизительно соответствуют моментам $t = 0$ и $t = T/2$. Это упрощает форму аналитических решений.

В дальнейшем анализе мы ограничимся для определенности случаем $n = 2$. Когда $\omega = \omega_0/2$, при сравнительно узкой зоне застоя спектр установившихся асимметричных колебаний состоит преимущественно из основной гармоники, частота которой совпадает с частотой возбуждения ω , и ее второй гармоники, частота которой 2ω равна собственной частоте осциллятора (см. рис. 6). Можно заметить в спектре также небольшую примесь третьей гармоники.

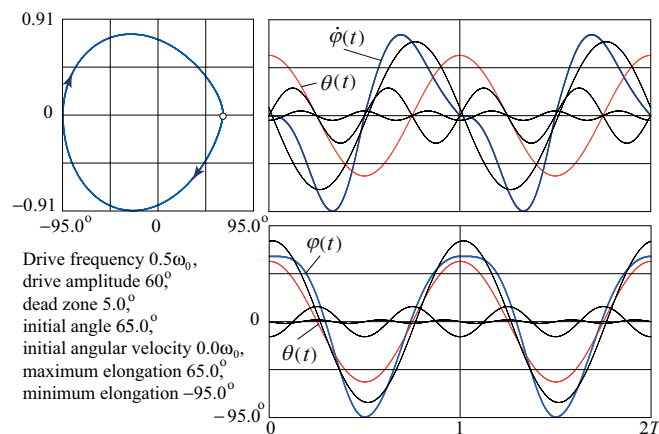


Рис. 6: Фазовая траектория и графики зависимости от времени для $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ вместе с графиками второй и третьей их гармоник для случая асимметричных установившихся колебаний без залипаний при частоте возбуждения $\omega = \omega_0/2$ и небольшой ширине зоны застоя ($d = 5.0^\circ$).

С математической точки зрения, основная гармоника соответствует периодическому частному решению неоднородных дифференциальных уравнений (1)–(2) с $\gamma = 0$ и с синусоидальным вынуждающим членом $\omega_0^2 \theta_0 \cos \omega t$ в правой части уравнений, частота ω которого равна $\omega_0/2$. Это частное решение имеет вид $\frac{4}{3} \theta_0 \cos \omega t$. Момент силы сухого трения сдвигает среднюю точку таких колебаний к $-d$ (левой границе зоны застоя) при $\dot{\varphi} > 0$ и к d при $\dot{\varphi} < 0$. Поочередное периодическое смещение вправо-влево средней точки рассматриваемых колебаний объясняет появление третьей гармоники в решении, которое иллюстрируется моделированием, показанным на рис. 6.

Вторая гармоника с частотой $2\omega = \omega_0$ представляет собой общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнениям (1)–(2)). Это общее решение однородного уравнения описывает собственные колебания осциллятора, происходящие на частоте $\omega_0 = 2\omega$. Его можно записать (при $\gamma = 0$) в виде $A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t$, где A и B – произвольные постоянные. В противоположность случаю системы с вязким трением, здесь это общее решение однородного уравнения – колебание с собственной частотой – не затухает на протяжении переходного процесса. Моделирование показывает, что (в соответствии с требованием $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(T/2) = 0$) в установившихся колебаниях фаза этой второй гармоники такова, что $B = 0$ (см. рис. 6). Поэтому асимметричные стационарные колебания при $\omega = \omega_0/2$ можно приближенно описать следующими уравнениями:

$$\varphi_+(t) = \frac{4}{3} \theta_0 \cos \omega t + A_+ \cos 2\omega t - d, \quad \dot{\varphi} > 0, \quad (6)$$

$$\varphi_-(t) = \frac{4}{3} \theta_0 \cos \omega t + A_- \cos 2\omega t + d, \quad \dot{\varphi} < 0, \quad (7)$$

и

$$\dot{\varphi}_+(t) = -\frac{4}{3} \omega \theta_0 \sin \omega t - 2\omega A_+ \sin 2\omega t, \quad \dot{\varphi} > 0, \quad (8)$$

$$\dot{\varphi}_-(t) = -\frac{4}{3} \omega \theta_0 \sin \omega t - 2\omega A_- \sin 2\omega t, \quad \dot{\varphi} < 0. \quad (9)$$

Одно условие для нахождения констант A_+ и A_- вытекает из требования непрерывности $\varphi(t)$ в точках поворота, где угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$ меняет знак на противоположный. Это моменты $t = 0$ и $t = T/2$ (см. рис. 6). Из $\varphi_+(0) = \varphi_-(0)$ получаем $A_+ - A_- = 2d$, или $A_+ = A_- + 2d$ (условие $\varphi_-(T/2) = \varphi_+(T/2)$ приводит к такому же соотношению между A_+ и A_-). Поэтому только одна из этих констант остается произвольной.

Стационарный режим колебаний, описываемый уравнениями (6)–(9), будет происходить с самого начала (без переходного процесса) только при определенных начальных условиях. При $t = 0$ из (8) или (9) находим, что необходимая для этого начальная скорость должна быть равна нулю: $\dot{\varphi}(0) = 0$. Это значение не зависит от ширины d зоны застоя и амплитуды θ_0 возбуждающего шатуна. Поскольку на протяжении первой половины периода угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$ отрицательна, для получения требуемого начального отклонения нужно использовать уравнение (7), из которого следует $\varphi_0 = \varphi(0) = \frac{4}{3} \theta_0 + A_- + d$. Таким образом, произвольные постоянные A_+ и A_- , которыми определяется вклад второй гармоники в стационарные колебания ротора, зависят от начального угла отклонения φ_0 :

$$A_+ = \varphi_0 - \frac{4}{3} \theta_0 + d, \quad A_- = \varphi_0 - \frac{4}{3} \theta_0 - d. \quad (10)$$

Это значит, что в случае системы с сухим трением, в противоположность осциллятору с вязким трением, разные начальные условия приводят, вообще говоря, к разным режимам установившихся колебаний (к разным предельным циклам). Подставляя найденные значения A_+ и A_- в (6)–(9), мы получаем в замкнутой форме аналитические решения, описывающие асимметричные режимы стационарных вынужденных колебаний осциллятора с сухим трением при субрезонансных частотах возбуждения $\omega = \omega_0/2$. Ниже будет показано, что такие стационарные режимы реализуются с самого начала возбуждения, если значение φ_0 принадлежит определенному интервалу.

3.2 Особенности асимметричных установившихся колебаний

Теперь можно установить некоторые интересные свойства обсуждаемых стационарных решений. Максимальные отклонения ротора соответствуют точкам поворота и потому происходят в моменты $t \approx 0$ и $t \approx T/2$. Наибольшее отклонение вправо происходит при $t \approx 0$ и, в соответствии с (6) или (7), составляет $\varphi_{\max} = \frac{4}{3} \theta_0 + A_- + d$ (или, что то же самое, $\varphi_{\max} = \frac{4}{3} \theta_0 + A_+ - d$). Крайнее отклонение влево происходит при $t \approx T/2$ и составляет $|\varphi_{\min}| = \frac{4}{3} \theta_0 - A_- - d = \frac{4}{3} \theta_0 - A_+ + d$.

Мы получаем, что при таких асимметричных колебаниях полное угловое расстояние $\varphi_{\max} + |\varphi_{\min}|$ между крайними положениями ротора (весь угловой путь между точками поворота) для всех возможных решений (6)–(7) составляет $\frac{8}{3}\theta_0$:

$$\varphi_{\max} + |\varphi_{\min}| = \varphi_{\max} - \varphi_{\min} = \frac{8}{3}\theta_0. \quad (11)$$

Весь угловой путь ротора между точками поворота зависит только от амплитуды θ_0 возбуждающего шатуна, и не зависит от величины сухого трения (от ширины зоны застоя).

Разность наибольших отклонений вправо и влево характеризует асимметрию такого стационарного режима:

$$\varphi_{\max} - |\varphi_{\min}| = 2(A_+ - d) = 2(A_- + d) = 2(\varphi_0 - \frac{4}{3}\theta_0). \quad (12)$$

Наибольшие отклонения вправо и влево равны друг другу при $\varphi_0 - \frac{4}{3}\theta_0 = 0$. В этом случае $A_+ = d$ и $A_- = -d$, и вторая гармоника в составе колебания, описываемого уравнениями (6)–(7), пропадает. Такое симметричное стационарное колебание с амплитудой $\frac{4}{3}\theta_0$ происходит только тогда, когда начальное отклонение ротора φ_0 равно $\frac{4}{3}\theta_0$, а начальная угловая скорость равна нулю.

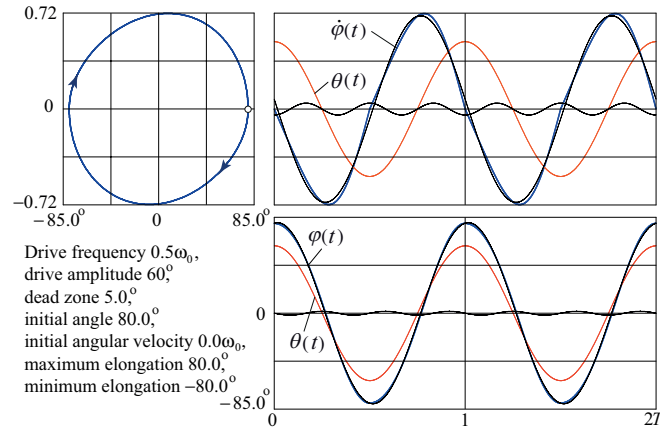


Рис. 7: Фазовая траектория и графики зависимости от времени для $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ вместе с графиками их гармоник для симметричных стационарных колебаний без залипаний, происходящих при $\omega = \omega_0/2$ и небольшой ширине зоны застоя ($d = 5.0^\circ$)

Фазовая траектория и графики зависимости от времени угла отклонения $\varphi(t)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ (вместе с графиками их гармоник) для случая таких симметричных колебаний показаны на рис. 7. При малой ширине зоны застоя графики $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ почти сливаются с графиками их основных гармоник.

Начальные условия, при которых предельный цикл характеризуется наибольшей асимметрией, можно найти следующим образом. Нас интересует режим без залипаний с двумя точками поворота на протяжении каждого цикла возбуждения. Эти повороты происходят в моменты времени около $t = 0$ и $t = T/2$, когда угловая скорость $\dot{\varphi}$ изменяет знак на противоположный. Для нахождения условий, при которых изменения направления вращения ротора происходят без залипаний, т. е. без задержек на конечный промежуток времени, можно воспользоваться физическими соображениями. Действительно, чтобы в точке поворота не произошло задержки, момент силы упругости, действующей на маховик со стороны закрученной пружины, должен быть больше или по крайней мере таким же, как максимально возможный момент силы трения покоя. Искомое условие соответствует равенству моментов этих двух сил. Когда действующий со стороны пружины момент упругой силы уравнивает момент силы трения покоя, угловое ускорение ротора $\ddot{\varphi}$ обращается в нуль. Далее мы рассматриваем такое условие для точек каждого из поворотов, происходящих при $t = 0$ и $t = T/2$.

- Для первого поворота, происходящего при $t = 0$, нужно потребовать выполнение условия $\ddot{\varphi}(0) = 0$, пользуясь уравнением (7), справедливым при отрицательной угловой скорости

$\dot{\varphi}(t) < 0$ (см. рис. 6). Из этого требования сразу получаем $A_- = -\frac{1}{3}\theta_0$. Подставляя это значение в уравнение (10), получаем первую (нижнюю) границу $\varphi_{0(\text{lower})}$ для допустимых начальных отклонений ротора:

$$\varphi_{0(\text{lower})} = \theta_0 + d. \quad (13)$$

При таком начальном отклонении реализуется одно из двух возможных стационарных колебаний с наибольшей асимметрией. В этом колебании наибольшее и наименьшее отклонения ротора равны соответственно:

$$\varphi_{\text{max}} = \theta_0 + d, \quad \varphi_{\text{min}} = -\frac{5}{3}\theta_0 + d. \quad (14)$$

- Для нахождения второй границы допустимого интервала начальных отклонений $\varphi_{0(\text{upper})}$ нужно потребовать выполнения условия $\dot{\varphi}(T/2) = 0$, используя уравнение (6). Это дает $A_+ = \frac{1}{3}\theta_0$, и для второй (верхней) границы допустимого интервала начальных отклонений получаем:

$$\varphi_{0(\text{upper})} = \frac{5}{3}\theta_0 - d. \quad (15)$$

При таком начальном отклонении ротора реализуется второй из двух возможных наиболее асимметричных стационарных режимов вынужденных колебаний. В этом режиме крайние отклонения ротора равны соответственно:

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{5}{3}\theta_0 - d, \quad \varphi_{\text{min}} = -\theta_0 - d. \quad (16)$$

Чтобы проверить эти теоретические предсказания с помощью компьютерного моделирования, положим амплитуду возбуждающего шатуна $\theta_0 = 60^\circ$. При этом в установившемся режиме полный угловой путь ротора между крайними отклонениями $\varphi_{\text{max}} + |\varphi_{\text{min}}|$ должен составлять $\frac{8}{3}\theta_0 = 160^\circ$ независимо от величины сухого трения (от ширины зоны застоя). В данном моделирующем эксперименте ширина зоны застоя d равна 5° . Одно из двух возможных стационарных колебаний с наибольшей асимметрией (см. рис. 6) должно происходить с самого начала (без какого-либо переходного процесса), в соответствии с выражением (13), при начальных условиях $\varphi(0) = \theta_0 + d = 65^\circ$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. При этом крайние отклонения ротора должны составлять $\varphi_{\text{max}} = \theta_0 + d = 65^\circ$ и $\varphi_{\text{min}} = -\frac{5}{3}\theta_0 + d = -95^\circ$. Эти теоретические предсказания полностью согласуются с результатами компьютерного моделирования (см. рис. 6).

Стационарное вынужденное колебание с одинаковыми максимальными отклонениями ротора в обе стороны ($\varphi_{\text{max}} = |\varphi_{\text{min}}| = 80^\circ$) при тех же самых значениях параметров физической системы ($\theta_0 = 60^\circ$, $d = 5^\circ$) происходит, если начальное отклонение ротора равно $\varphi_0 = \frac{4}{3}\theta_0 = 80^\circ$. Этот случай иллюстрируется моделированием, показанным на рис. 7.

Второе возможное колебание с наибольшей асимметрией ($\dot{\varphi}(T/2) = 0$) происходит, согласно выражению (15), при следующих начальных условиях: $\varphi(0) = \frac{5}{3}\theta_0 - d = 95^\circ$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Максимальные отклонения ротора вправо и влево в этом случае, согласно (16), должны быть $\varphi_{\text{max}} = \frac{5}{3}\theta_0 - d = 95^\circ$ и $\varphi_{\text{min}} = -\theta_0 - d = -65^\circ$ соответственно. Такие асимметричные стационарные колебания иллюстрирует моделирование, показанное на рис. 8.

Три различных предельных цикла вынужденных колебаний, происходящих без залипаний, показанные на рисунках 6–8, соответствуют одним и тем же значениям параметров физической системы, а именно $\omega = \omega_0/2$, $\theta_0 = 60.0^\circ$, и $d = 5.0^\circ$. На самом деле при $\omega = \omega_0/2$ существует целый континуум различных стационарных колебаний без залипаний с одной и той же величиной полного углового расстояния $\frac{8}{3}\theta_0$ между крайними отклонениями, которое пропорционально амплитуде θ_0 возбуждающего шатуна. В таком сосуществовании нескольких стационарных режимов при одних и тех же значениях параметров проявляется *мультистабильность* — типичная черта нелинейных систем.

Когда начальная угловая скорость ротора $\dot{\varphi}(0)$ равна нулю, а начальный угол отклонения $\varphi(0)$ лежит в интервале от $\varphi_{0(\text{lower})} = \theta_0 + d$ до $\varphi_{0(\text{upper})} = \frac{5}{3}\theta_0 - d$, стационарные колебания ротора начинаются без переходного процесса сразу после включения внешнего воздействия. Характер этих стационарных колебаний варьируется в данном интервале начальных отклонений от одного из наиболее асимметричных колебаний, происходящих при $\varphi_{0(\text{lower})} = \theta_0 + d$ (см. рис. 6), проходя через случай симметричных колебаний при $\varphi_0 = \frac{4}{3}\theta_0$ (рис. 7), вплоть до второго наиболее асимметричного случая, соответствующего $\varphi_{0(\text{upper})} = \frac{5}{3}\theta_0 - d$ (рис. 8). Если начальное отклонение ротора лежит

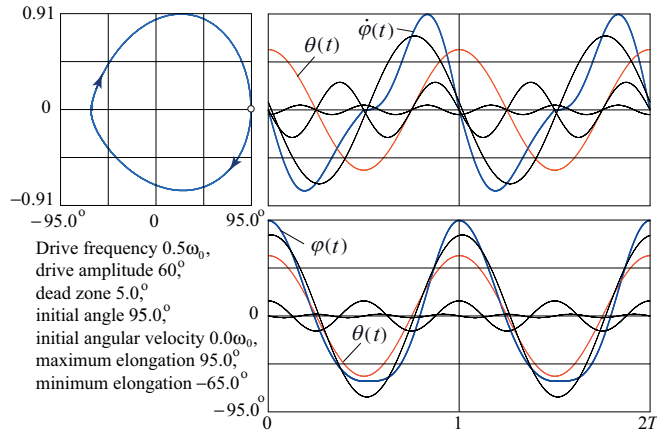


Рис. 8: Фазовая траектория и графики зависимости от времени для $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ вместе с графиками их гармоник для максимально асимметричных стационарных колебаний без залипаний, происходящих при $\omega = \omega_0/2$ и небольшой ширине зоны застоя ($d = 5.0^\circ$)

за пределами этого интервала значений, или если начальная скорость ротора не равна нулю, в конце концов колебания выходят на один из предельных циклов из этого континуума. Стационарный режим устанавливается после переходного процесса, в течение которого ротор совершает колебания с залипаниями (остановками конечной длительности). Пример такого переходного процесса, происходящего при $\theta_0 = 60.0^\circ$, $d = 5.0^\circ$, и начальных условиях $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$ показан на рис. 9.

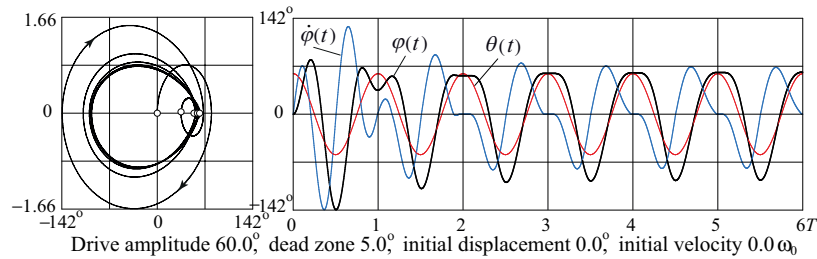


Рис. 9: Фазовая траектория и графики зависимости от времени $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ для переходного процесса при $\omega = \omega_0/2$, $\theta_0 = 60.0^\circ$, $d = 5.0^\circ$, и начальных условий $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

Неудивительно, что при наличии в системе даже очень слабого вязкого трения описанные выше асимметричные режимы можно наблюдать только на начальной стадии процесса вынужденных колебаний: после длительного переходного процесса колебания становятся симметричными, подобными тем, что показаны на рис. 7. Действительно, асимметрия колебаний вызвана вкладом второй гармоники, которая соответствует собственным колебаниям на частоте $\omega_0 = 2\omega$. С математической точки зрения эта вторая гармоника обусловлена тем, что в полном решении дифференциального уравнения присутствует общее соответствующего однородного уравнения. При наличии вязкого трения в системе такие собственные колебания на протяжении переходного процесса постепенно «вымирают».

Стационарные вынужденные колебания рассмотренного выше типа могут происходить без залипаний на субрезонансных частотах при заданной амплитуде возбуждения только при условии, что сухое трение не слишком сильное. Чтобы найти количественное условие этого ограничения, достаточно приравнять выражения (13) и (15) для нижней и верхней границ допустимого интервала начальных отклонений: $\varphi_{0(\text{lower})} = \varphi_{0(\text{upper})}$. Иначе искомое ограничение можно найти, приравняв наибольшие отклонения $\varphi_{\text{max}} = \theta_0 + d$ и $|\varphi_{\text{min}}| = \frac{5}{3}\theta_0 - d$ для любого из максимально асимметричных стационарных режимов. В результате для допустимой ширины мертвой зоны получаем $d_{\text{max}} = \theta_0/3$. При $d = \theta_0/3$ существует только один (симметричный) предельный цикл с

амплитудой колебаний ротора $\varphi_{\max} = \frac{4}{3}\theta_0$. При значениях ширины мертвой зоны, превосходящих $d_{\max} = \theta_0/3$ стационарные колебания возможны только с залипаниями.

Аналогичные особенности присущи вынужденным колебаниям осциллятора с сухим трением при синусоидальном возбуждении на других субрезонансных частотах четных порядков $\omega = \omega_0/(2n)$. В частности, при $\omega = \omega_0/4$ также существует континуум асимметричных стационарных режимов колебаний без залипаний при одних и тех же значениях параметров системы, если ширина d мертвой зоны не превышает $\frac{1}{15}\theta_0$, где θ_0 — амплитуда возбуждающего шатуна. Полное угловое перемещение ротора между крайними отклонениями для всех предельных циклов данного континуума составляет $\frac{32}{15}\theta_0$. Каждый из таких стационарных режимов наступает без переходного процесса, если начальная скорость ротора равна нулю, а его начальное отклонение лежит в интервале между $\theta_0 + d$ и $\frac{17}{15}\theta_0 - d$. Пример таких стационарных асимметричных колебаний показан на рис. 10.

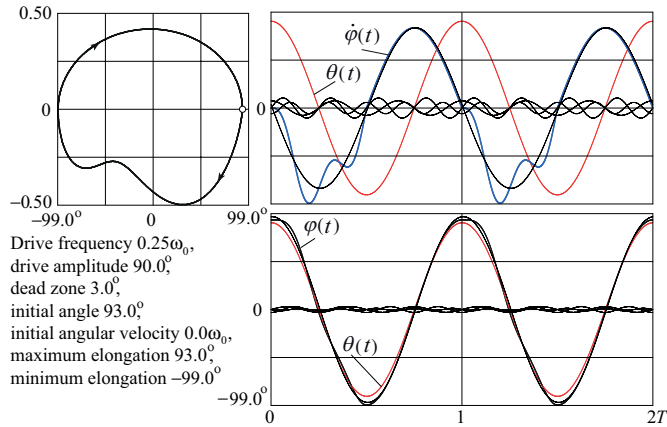


Рис. 10: Фазовая траектория и графики зависимости от времени $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ (вместе с гармониками) для асимметричного стационарного режима без залипаний при $\omega = \omega_0/4$, $\theta_0 = 90.0^\circ$, $d = 3.0^\circ$.

3.3 Субрезонансные частоты нечетных порядков

При субрезонансных частотах возбуждения нечетных порядков $\omega = \omega_0/(2n + 1)$ колебания без залипаний невозможны: по меньшей мере дважды на протяжении каждого цикла возбуждения происходят остановки ротора (угловая скорость обращается в нуль) на промежутки времени конечной длительности. Пример стационарных колебаний при $\omega = \omega_0/3$ показан на рис. 11. Графики зависимости от времени $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ и их гармоник (как и фазовая траектория) получены с помощью компьютерного моделирования. При амплитуде возбуждения 80.0° и зоне застоя шириной 10.0° происходят симметричные колебания с максимальными отклонениями ротора 78.0° . Спектр таких колебаний состоит из гармоник только нечетных порядков: амплитуда первой гармоники равна 91.8° , третьей — 15.6° , пятой — 1.4° . Эти значения практически одинаковы для любых значений ширины мертвой зоны из интервала $5.0^\circ - 25.0^\circ$.

4 Заключение

При нерезонансном гармоническом возбуждении ($\omega \neq \omega_0$) осциллятора с сухим трением стационарные колебания конечной амплитуды обычно устанавливаются после переходного процесса конечной длительности даже в отсутствие вязкого трения. В общем случае периодический режим вынужденных колебаний без залипаний состоит из двух симметричных фаз равной длительности $T/2$, если при заданной ширине d мертвой зоны амплитуда возбуждения θ_0 достаточно велика для предотвращения залипаний. Амплитуда таких симметричных стационарных колебаний при данной частоте возбуждения ω однозначно зависит от θ_0 и d .

Интересные особенности вынужденных колебаний обнаруживаются при субрезонансных частотах возбуждения $\omega = \omega_0/n$ ($n = 2, 4, \dots$). В частности, в отсутствие вязкого трения при одних

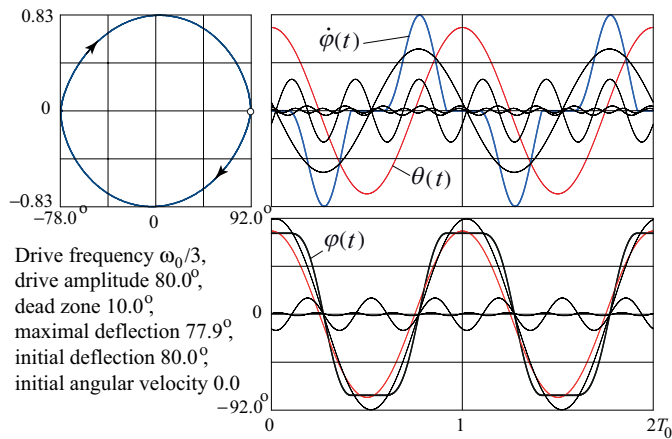


Рис. 11: Фазовая траектория и графики зависимости от времени $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ (вместе с гармониками) для симметричного стационарного режима при $\omega = \omega_0/3$ с двумя чередующимися фазами скольжения и залипания на протяжении каждого цикла возбуждения ($\theta_0 = 80.0^\circ$, $d = 10.0^\circ$)

и тех же значениях параметров θ_0 и d существует целый континуум различных стационарных колебаний без залипаний. Такие колебания в общем случае асимметричны – наибольшие отклонения ротора вправо и влево неодинаковы. При этом полное угловое перемещение ротора между точками поворота одинаково во всех асимметричных режимах (для заданного значения амплитуды θ_0 возбуждающего шатуна) и не зависит от ширины d зоны застоя. Степень асимметрии определенного стационарного режима зависит от начальных условий. Среди континуума режимов, сосуществующих при данных значениях θ_0 и d , имеется одно симметричное колебание. При наличии даже очень слабого вязкого трения асимметричные колебания можно наблюдать только на начальной стадии: после продолжительного переходного процесса вклад собственных колебаний, вызывающих асимметрию (примесь второй гармоники) постепенно «вымирает», и в конце концов колебания становятся симметричными.

При субрезонансных частотах возбуждения нечетных порядков $\omega = \omega_0/(2n + 1)$ колебания без залипаний невозможны: на протяжении каждого цикла возбуждения происходят остановки ротора (угловая скорость обращается в нуль) на промежутки времени конечной длительности.

Список литературы

- [1] Е. И. Бутиков, Осциллятор с сухим трением. I. Собственные и резонансные колебания, Компьютерные инструменты в образовании.
- [2] J. P. Den Hartog, Forced vibrations with combined Coulomb and viscous damping, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, **53**, 107–115, 1930.
- [3] S. W. Shaw, On the dynamic response of a system with dry friction, J. Sound Vib., **108**, 305–325, 1986.
- [4] H.-K. Hong, C.-S. Liu, Non-sticking oscillation formulae for Coulomb friction under harmonic loading, J. Sound Vib., **244**, 883–898, 2001.
- [5] J. W. Liang, B. F. Feeny, Identifying Coulomb and Viscous Friction in Forced Dual-Damped Oscillators, Journal of Vibration and Acoustics, **126**, 118–125, 2004.
- [6] A. C. J. Luo, B. C. Gegg, Stick and non-stick periodic motions in periodically forced oscillators with dry friction, J. Sound Vib., **291**, 132–168, 2006.
- [7] G. Csernák, G. Stépán, On the periodic response of a harmonically excited dry friction oscillator. J. Sound Vib., **295**, 649–658, 2006.

- [8] G. Csernák, G. Stépán, S. W. Shaw, Sub-harmonic resonant solutions of a harmonically excited dry friction oscillator, *Nonlinear Dynamics*, **53**, 93–109, 2007.
- [9] E. I. Butikov, *Torsion Pendulum with Dry and Viscous Friction* (a simulation program), see on the web <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Applets/DryViscOsc.html>, 2013.