

Бутиков Евгений Иванович

НЕОБЫЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ МАЯТНИКА ПРИ СИНУСОИДАЛЬНОМ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ. ЧАСТЬ 2

В этой статье мы продолжим обсуждение разнообразных экзотических режимов колебаний и переворотов жесткого маятника в поле тяжести, подверженного воздействию синусоидального внешнего момента. Описываемые режимы можно наблюдать с помощью моделирующей компьютерной программы, помещенной на прилагаемом к диске к первому номеру журнала за этот год. Кроме режимов, обсуждаемых в статье, программа содержит множество других заранее приготовленных примеров необычных периодических и хаотических режимов. Программу можно использовать также для обнаружения новых, еще не известных движений этой простой, но поистине неисчерпаемой физической системы.

1. ВВЕДЕНИЕ: МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАЯТНИКА

Напомним, что мы изучаем возможные движения простых нелинейных систем – математического маятника, то есть точечной массы, закрепленной на конце невесомого стержня, и физического маятника, то есть произвольного твердого тела, которое может свободно поворачиваться вокруг горизонтальной оси в однородном поле тяготения. Эти системы динамически эквивалентны, так как описываются одним и тем же дифференциальным уравнением. Согласно этому уравнению, угло-

вое ускорение $\ddot{\varphi}(t)$ определяется возвращающим моментом силы тяжести, который пропорционален синусу угла отклонения $\varphi(t)$ маятника от вертикали, тормозящим моментом силы трения, который пропорционален угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$, и, наконец, внешним моментом, синусоидально зависящим от времени:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь ω – частота внешнего воздействия, ω_0 – частота малых собственных колебаний ($\omega_0 = 2\pi/T_0$, где T_0 – период малых собственных колебаний), γ – постоянная затухания. Вместо постоянной затухания удобно использовать эквивалентный безразмерный параметр – *добротность* $Q = \omega_0/(2\gamma)$.

Действие на маятник внешнего момента сил $N(t)$ описывается правой частью уравнения (1). Безразмерная амплитуда этого момента θ_0 имеет наглядный физический смысл: под действием статического момента, измеряемого величиной θ_0 , маятник отклоняется от вертикали на угол φ_0 такой, что $\sin \varphi_0 = \theta_0$. Поэтому значение $\theta_0 = 1$ соответствует внешнему моменту, который необходим для отклонения маятника до горизонтального положения $\varphi_0 = \pi/2$, где возвращающий момент силы тяжести максимален.

Положение маятника определяется одной величиной – углом его отклонения от положения равновесия φ . Поэтому гово-

рят, что маятник представляет собой систему с одной степенью свободы. Механическое состояние маятника в любой момент времени определяется двумя величинами: углом отклонения φ и угловой скоростью $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$, то есть число величин, определяющих механическое состояние системы, вдвое больше числа ее степеней свободы. Состояние маятника принято изображать точкой на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$. При движении маятника его механическое состояние изменяется, и изображающая точка на фазовой плоскости вычерчивает непрерывную кривую, называемую фазовой траекторией. Фазовая траектория дает наглядный геометрический образ процесса движения в целом, то есть всю картину изменения состояния маятника при колебаниях или переворотах.

Когда на маятник действует внешняя сила, заданным образом зависящая от времени (например, синусоидально), к переменным, определяющим состояние системы, следует добавить еще и время t . Это значит, что фазовое пространство такой системы трехмерно – можно представить себе дополнительную ось времени, перпендикулярную к фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$. Трехмерность фазового пространства, возбуждаемого внешней силой маятника, позволяет говорить, что такая механическая система имеет «полторы» степени свободы. Но обычно, вместо трехмерной фазовой траектории, рассматривают ее двумерную проекцию на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$, дополненную сечениями Пуанкаре – точками, изображающими значения $\varphi, \dot{\varphi}$ через промежутки времени, равные периоду T внешнего воздействия ($T = 2\pi/\omega$).

2. НЕОБЫЧНЫЕ РЕЖИМЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА

В первой части статьи были рассмотрены разнообразные колебательные движения маятника, которые можно возбудить традиционным способом изучения резонансных явлений – медленным изменением («сканированием») частоты внешнего воздействия без прерывания процесса вынужденных колебаний. Однако многие интересные и необычные регулярные (периодические) и хаотические режимы возбудить таким способом невозможно.

Один из подобных примеров приведен на рис. 1. За каждый цикл изменения внешнего момента маятник совершает одно колебание, происходящее почти в противофазе с изменениями внешнего момента, как это должно быть на правом (высокочастотном) склоне резонансной кривой. Однако размах этих установившихся колебаний изменяется от цикла к циклу: маятник отклоняется в одну сторону сначала на 171° , затем на 117° , и,

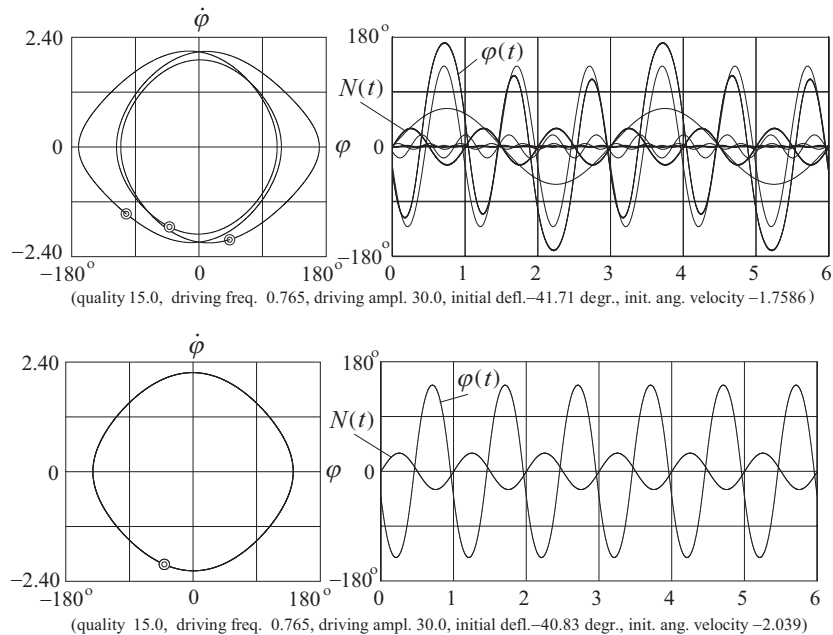


Рис. 1. Фазовая траектория и график $\varphi(t)$ для нелинейных колебаний, полный цикл которых охватывает три периода внешнего возбуждения (вверху), и для обычных колебаний большой амплитуды, полный цикл которых равен периоду возбуждения. Оба режима существуют при одних и тех же параметрах системы

наконец, на 111° . После трех циклов все в точности повторяется, так что полный период установившихся колебаний равен трем периодам внешнего возмущения.

Проекция фазовой траектории на плоскость $(\varphi, \dot{\varphi})$ замыкается после трех витков (левая верхняя часть, рис. 1).

Правая верхняя часть рис. 1 показывает график угла отклонения $\varphi(t)$ и графики его гармоник (тонкие линии) вместе с графиком внешнего момента $N(t)$. В спектре таких установившихся вынужденных колебаний преобладает третья гармоника, период которой равен периоду внешнего воздействия $T = 2\pi/\omega$, но фундаментальная гармоника имеет вдвое больший период $3T$ – ее частота равна $\omega/3$.

Описываемый режим установившихся колебаний можно возбудить только путем определенного выбора начальных условий: начальное состояние $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ должно находиться в бассейне притяжения этого периодического режима. На такой режим невозможно выйти в процессе сканирования: при достижении данного значения частоты маятник будет совершать обычные установившиеся вынужденные колебания с периодом внешнего воздействия, соответствующие высокочастотному склону кривой нелинейного резонанса. Фазовая траектория и график $\varphi(t)$ обычных вынужденных колебаний приведены для сравнения в нижней части рис. 1. Это еще один пример мультистабильности, характерной для нелинейных систем: при одних и тех же параметрах системы и внешнего воздействия сосуществуют несколько различных устойчивых режимов (аттракторов), каждому из которых соответ-

ствует свой бассейн притяжения на фазовой плоскости. Когда начальные условия $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$ выбраны в пределах бассейна притяжения некоторого режима, фазовая траектория асимптотически приближается к предельному циклу, который соответствует данному режиму.

Другой пример необычного поведения маятника под действием синусоидального внешнего момента иллюстрируется графиками на рис. 2. Частота внешнего воздействия здесь несколько меньше собственной частоты малых колебаний маятника ($\omega = 0.9\omega_0$). Оказывается, что в таких условиях могут установиться колебания, характер которых напоминает биения: амплитуда и частота колебаний не остаются неизменными, а медленно изменяются с периодом, который охватывает целое (нечетное и весьма большое) число циклов вынуждающей силы (в примере на рис. 2 – одиннадцать циклов).

Самое удивительное в описываемом режиме заключается в том, что колебания маятника имеют стационарный характер – биения продолжают сколь угодно долго, то есть не затухают. Этим они принципиально отличаются от обычных затухающих переходных биений. Маятник совершает одно колебание за каждый цикл внешнего воздействия, но размах колебаний меняется от цикла к циклу, не обнаруживая никакой тенденции к выравниванию, как бы долго мы не наблюдали за движением. При этом через каждые одиннадцать циклов внешнего момента в точности воспроизводится начальное состояние системы.

Можно предложить весьма простое физическое объяснение этому экзотическому режиму. Пусть сначала колебания имеют небольшой размах, а синусоидальные изменения внешнего момента происходят почти в одинаковой фазе с колебаниями угловой скорости маятника. Действительно, из графиков

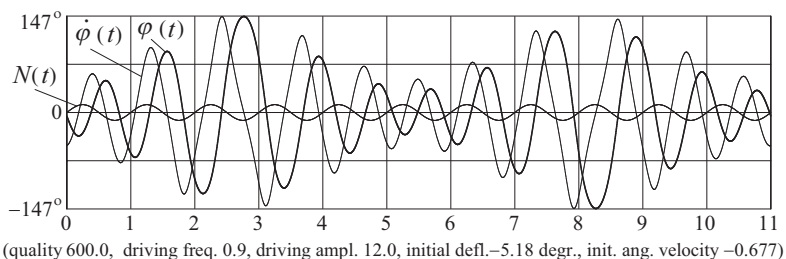


Рис. 2. Графики угла отклонения $\varphi(t)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ для режима незатухающих биений с периодом $11T$

на рис. 2 видно, что на начальном этапе внешний момент почти все время направлен в ту же сторону, что и скорость маятника, то есть внешняя сила постоянно «подталкивает» маятник в направлении его движения. Такие фазовые соотношения благоприятны для передачи энергии маятнику и обеспечивают резонансный рост первоначально малых колебаний.

Но с увеличением амплитуды собственный период маятника возрастает, что приводит к постепенному изменению фазовых соотношений между колебаниями маятника и синусоидальными вариациями внешнего момента $N(t)$. Через некоторое время из-за накопившегося сдвига фаз временной ход $N(t)$ оказывается в противофазе с колебаниями угловой скорости, и амплитуда начинает убывать, так как теперь внешняя сила тормозит движение маятника. Это значит, что маятник отдает энергию источнику внешнего момента. Затем убывание амплитуды снова сменяется ее ростом, то есть колебания приобретают характер биений.

Благодаря небольшому трению, возможна полная синхронизация («фазовый захват») колебаний маятника и внешнего момента. В результате фазового захвата устанавливается стационарный режим, в котором вложение энергии в систему за полный период ее колебаний (за 11 циклов внешнего воздействия) несколько больше возвращаемой энергии. Этим обеспечивается необходимая для стационарного режима компенсация потерь энергии из-за трения.

Для установления этого режима (при данных значениях частоты и амплитуды внешнего момента) начальное состояние должно лежать в одном из 11 крошечных «островков» фазовой плоскости, образующих бас-

сейн притяжения данного периодического аттрактора. Сравнительно слабое возмущение может нарушить стационарный 11Т-периодический режим, и после длительного переходного процесса устанавливаются (при тех же параметрах системы) обычные вынужденные колебания маятника с периодом, равным одному циклу внешнего воздействия.

На рис. 3 показаны гармонические составляющие, то есть спектральный состав установившихся колебаний с периодом в 11 циклов внешней силы. Частота фундаментальной гармоники этих несинусоидальных колебаний равна $1/11$ частоты внешнего воздействия ω . Эту гармонику трудно увидеть на рис. 3, так как ее амплитуда на порядок величины меньше амплитуды 11-й гармоники, частота которой совпадает с частотой возбуждения. Кроме 11-й гармоники, заметный вклад в результирующее колебание дают гармоники с частотами, составляющими $7/11$, $9/11$ и $13/11$ внешней частоты.

Амплитуды гармоник $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ приведены в табл. 1.

Табл. 1. Амплитуды нечетных гармоник колебаний с периодом 11Т

№	Амплитуда (рад)	Амплитуда (град)	Амплитуда (в ед. ω_0)
1	0.091	5.214	0.007
3	0.137	7.850	0.039
5	0.269	15.41	0.121
7	0.585	33.52	0.374
9	1.164	66.69	0.951
11	0.883	50.59	0.885
13	0.428	24.52	0.507
15	0.013	0.745	0.018

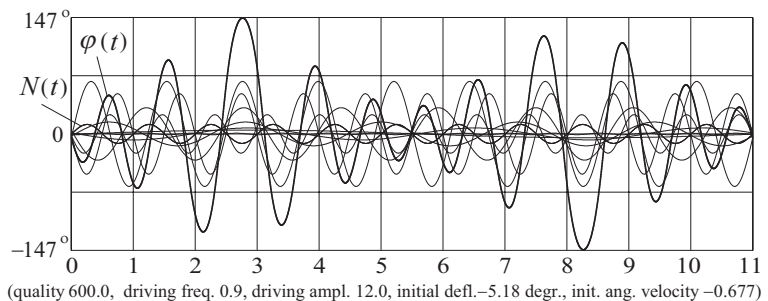


Рис. 3. Гармонические составляющие (спектр) установившихся колебаний с периодом в 11 циклов внешней силы

3. КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ МАЯТНИКА

До сих пор мы рассматривали регулярные (периодические) режимы, в которых маятник совершал колебания в пределах одной ямы потенциального рельефа, то есть не преодолевал барьеров, отделяющих ее от соседних ям. Но возможны регулярные движения маятника, в которых происходят полные его перевороты, означающие переходы в соседние потенциальные ямы.

В верхней части рис. 4 показаны фазовая траектория и график $\varphi(t)$ для стационарного колебательно-вращательного режима, в котором маятник совершает два колебания в пределах одной потенциальной ямы (им соответствуют два витка фазовой траектории на рис. 4) с отклонением вправо на 101° и 72° , но при следующем (третьем) отклонении вправо уже «переваливает» через вершину потенциального барьера (совершает переворот через верхнее положение) и оказывается в соседней потенциальной яме. Затем на

протяжении двух следующих периодов внешнего воздействия все повторяется: маятник опять совершает два колебания, после чего снова «ускользает» в расположенную справа соседнюю яму. Таким образом, каждый раз два колебания сопровождаются переворотом в одном и том же направлении, то есть маятник совершает систематический «дрейф» в одну сторону по потенциальному рельефу. Разумеется, при тех же значениях параметров возможен аналогичный $2T$ -периодический режим с систематическим дрейфом в противоположном направлении.

Интересно, что эти симметричные колебательно-вращательные режимы сосуществуют не только друг с другом, но и с двумя чисто колебательными режимами, фазовые траектории и графики таких колебаний показаны в нижней части рис. 4. Колебания малой амплитуды происходят почти синфазно с изменениями внешнего момента $N(t)$ (кривая 1 на фазовой траектории и график $\varphi_1(t)$). Они соответствуют левому склону резонансной кривой маятника (см. первую часть статьи). Не-

синусоидальные колебания большой амплитуды (кривая 2 и график $\varphi_2(t)$), происходящие почти в противофазе с $N(t)$, соответствуют правому склону резонансной кривой. Это еще один красноречивый пример мультистабильности – типичного явления для нелинейных систем.

На рис. 5 показан пример колебательно-вращательного режима, в котором маятник совершает поочередно перевороты в противоположных направлениях, так что направленного дрейфа по потенциальному рельефу в какую-либо одну сторону не происходит. Ма-

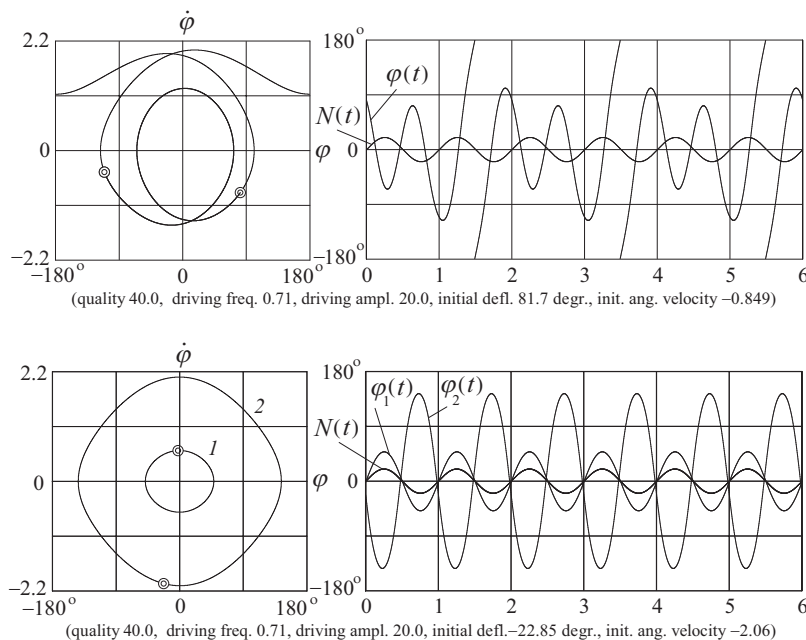


Рис. 4. Фазовые траектории (слева) и графики угла отклонения $\varphi(t)$ (справа) для колебательно-вращательного режима, период которого равен $2T$ (вверху), и для сосуществующих с ним режимов стационарных вынужденных колебаний (внизу)

маятник совершает полтора колебания в одной потенциальной яме, переваливает через потенциальный барьер в соседнюю яму, где также совершает полтора колебания, после чего переваливает обратно в прежнюю яму. Область движения ограничена двумя соседними ямами потенциального рельефа и барьером между ними.

Полный колебательно-вращательный цикл совершается за три периода внешнего возбуждения. Затем движение периодически повторяется.

Замечательно, что при тех же самых значениях параметров системы и внешнего возбуждения существует внешне сходный колебательно-вращательный режим (см. рис. 6), в котором маятник также совершает поочередно по полтора колебания в двух соседних ямах, но размах этих колебаний в последовательных циклах (каждый цикл состоит из трех периодов возбуждения) немного различается, и только после трех циклов состояние системы полностью воспроизводится. Таким образом, полный период движения маятника в описываемом стационарном режиме равен 9-ти периодам возбуждения. Сечения Пуанкаре, в отличие от трех фиксированных точек в 3*T*-периодическом режиме, теперь образуют три группы, каждая из которых состоит из трех близких фиксированных точек, посещаемых поочередно (сравните фазовые траектории на рис. 5 и 6).

В нижней части рис. 6 показаны также фазо-

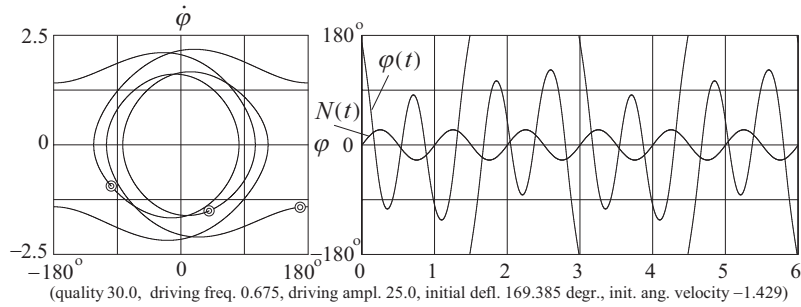


Рис. 5. Фазовая траектория (слева) и график угла отклонения $\varphi(t)$ (справа) для колебательно-вращательного режима, период которого равен 3*T*

вые траектории обычных колебательных режимов, сосуществующих с описываемыми 3*T*- и 9*T*-периодическими режимами (для несинусоидальных колебаний большой амплитуды показаны также графики гармонических составляющих).

4. ДРУГИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ РЕЖИМЫ

Колебательно-вращательные режимы маятника отличаются большим разнообразием

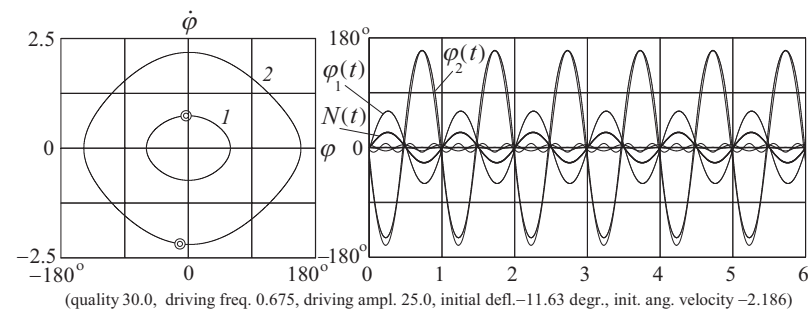
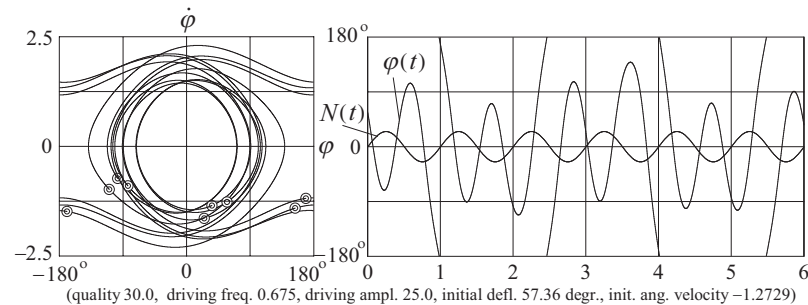


Рис. 6. Фазовые траектории (слева) и графики угла отклонения $\varphi(t)$ (справа) для колебательно-вращательного режима, период которого равен 9*T* (вверху), и для сосуществующих с ним режимов стационарных вынужденных колебаний (внизу)

разием. Варьируя параметры системы и начальные условия в моделирующей программе, можно составить целую коллекцию нетривиальных периодических и хаотических движений маятника. Некоторые из них включены в программу в виде заранее приготовленных примеров.

На рис. 7 показан колебательно-вращательный режим, в котором маятник совершает два с половиной колебания нарастающего размаха в одной потенциальной яме, переваливает через потенциальный барьер в соседнюю яму, где также совершает два с половиной колебания, после чего переваливает через тот же барьер в прежнюю яму. Область движения охватывает две соседние ямы потенциального рельефа и разделяющий их барьер. Полный колебательно-вращательный цикл совершается за пять периодов внешнего возбуждения. Затем движение периодически повторяется.

Замечательный пример установившегося периодического движения маятника при низкой частоте внешнего момента $N(t)$ представлен на рис. 8. На протяжении одного цикла изменения $N(t)$ маятник совершает 6 быстрых переворотов в одну сторону, после чего его вращение замедляется под действием внешнего момента, уже изменившего свое направление. Затем маятник приходит во вращение в противоположном направлении и опять совершает 6 быстрых переворотов в другую сторону. В течение каждого последующего цикла возбуждения движение в точности повторяется. Пример замечателен

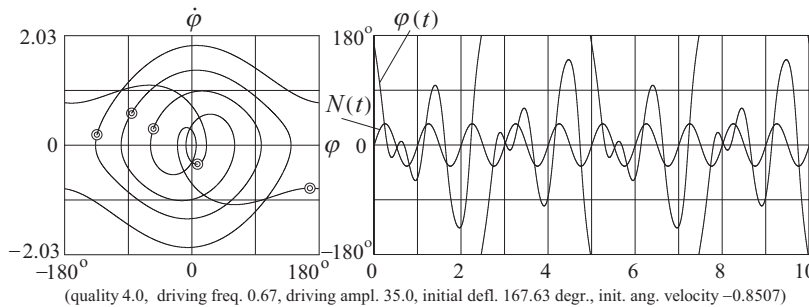


Рис. 7. Фазовая траектория (слева) и график угла отклонения $\varphi(t)$ (справа) для колебательно-вращательного режима, период которого равен $5T$

еще и тем, что при всей сложности наблюдаемого движения он допускает достаточно простое физическое объяснение.

Вид графиков на рис. 8 наводит на мысль, что зависимость угловой скорости от времени $\dot{\varphi}(t)$ можно представить как суперпозицию медленной периодической составляющей (изменяющейся почти синусоидально с периодом T) и небольшой быстро осциллирующей составляющей, искажающей плавное изменение $\dot{\varphi}(t)$. Можно предположить, что медленное изменение $\dot{\varphi}(t)$ вызвано низкочастотным возбуждающим моментом $N(t)$, а наложение дополнительных быстрых осцилляций обусловлено действием силы тяжести, замедляющей вращение маятника вблизи верхнего (перевернутого) положения и ускоряющей – вблизи нижнего положения. Поэтому столь необычное поведение маятника можно попытаться объяснить, вообще пренебрегая в первом приближении силой тяжести. Опуская последний член в левой части уравнения (1), выражающий действие силы тяжести, получаем следующее линейное уравнение первого порядка для угловой скорости $v(t) = \dot{\varphi}(t)$:

$$\dot{v}(t) + 2\gamma v = \omega_0^2 \theta_0 \sin \omega t. \quad (2)$$

Периодическое частное решение этого уравнения, описывающее установившиеся колебания, можно представить следующим образом:

$$v(t) = -v_m \cos(\omega t + \delta),$$

$$v_m = \frac{\omega_0^2 \theta_0}{\sqrt{\omega^2 + 4\gamma^2}},$$

$$\delta = \arctan \frac{2\gamma}{\omega}. \quad (3)$$

Таким образом, угловая скорость $v(t)$ изменяется со временем синусоидально с частотой ω внешнего момента $N(t)$ и амплитудой v_m , которая дается уравнением (3). Фактически $v(t)$ соответствует медленной составляющей угловой

скорости, то есть величине $\dot{\varphi}(t)$, усредненной по периоду быстрого вращения: $v(t) = \langle \dot{\varphi}(t) \rangle_{av}$. Согласно уравнению (3), амплитуда $v_m \approx \omega_0^2 \theta_0 / \omega$ равна $3.6\omega_0$ для значений $\theta_0 = 0.8$ и $\omega = 0.22\omega_0$, использованных в моделирующем эксперименте, результаты которого показаны на рис. 8, а сдвиг фаз между медленными колебаниями угловой скорости и изменениями внешнего момента $\delta = \arctan(2\gamma/\omega) = \arctan(\omega_0/Q\omega) \approx 0.3$. Эти значения хорошо согласуются с результатами эксперимента. Можно оценить также минимальный период Δt быстрого вращения. Для этого следует разделить полный угол 2π , проходимый маятником за переворот, на среднюю угловую скорость v_m . Отсюда $\Delta t/T = \omega/v_m = 0.06$. Это значение также хорошо подтверждается в эксперименте (см. рис. 8).

Амплитуду быстрых осцилляций угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ можно оценить с помощью закона сохранения энергии. Пусть $\dot{\varphi}_{max}$ и $\dot{\varphi}_{min}$ – соответственно максимальное и минимальное значения угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ на стадии наиболее быстрого вращения маятника. Кинетическая энергия вращающегося маятника в нижней точке, пропорциональная $\dot{\varphi}_{max}^2$, превосходит значение для верхней точки (для перевернутого положения) приблизительно на разность потенциальных энергий маятника в этих точках. С помощью таких соображений находим:

$$\dot{\varphi}_{max, min} = v_m (1 \pm \frac{\omega_0^2}{v_m^2}),$$

$$v_m = \frac{\omega_0^2 \theta_0}{\sqrt{\omega^2 + 4\gamma^2}} \approx \frac{\omega_0^2 \theta_0}{\omega}. \quad (4)$$

В соответствии с этой оценкой, относительная разность $(\dot{\varphi}_{max} - \dot{\varphi}_{min})/v_m$ при $\theta_0 = 0.8$ и $\omega = 0.22\omega_0$ равна 0.15, что также находится в хорошем согласии с моделирующим экспериментом, то есть с результатами численного интегрирования уравнения движения маятника.

5. ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В ПОВЕДЕНИИ МАЯТНИКА

Хаотическое, нерегулярное поведение физических систем (как, например, тепловое движение атомов и молекул) ассоциируется в нашем сознании прежде всего с огромным числом степеней свободы. Для макроскопических систем это число сопоставимо с постоянной Авогадро $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ 1/моль. Невозможность решения системы столь большого числа уравнений динамики, описывающих движение отдельных частиц, с неизбежностью требует использования иного – вероятностного – подхода, лежащего в основе статистической механики.

Но оказывается, что при определенных условиях даже простые нелинейные физические системы вроде нашего маятника, имеющего всего «полторы» степени свободы, могут демонстрировать нерегулярное поведение. Хаос в поведении таких систем называют *динамическим*, поскольку описывающее систему дифференциальное уравнение (для маятника это уравнение (1)) при любых начальных условиях имеет единственное решение, то есть движение системы полностью детерминировано. И, тем не менее, это движение может быть нерегулярным: состояние физической системы никогда не воспроизводится в точности, не повторяется

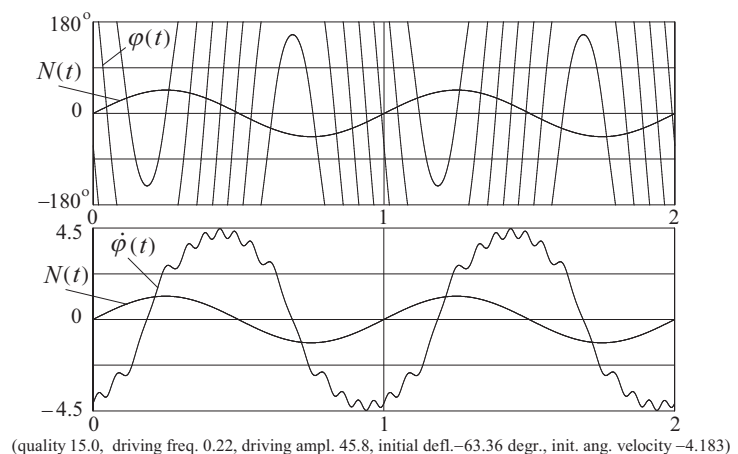


Рис. 8. Быстрые вращения маятника поочередно в одну и в противоположную сторону под действием низкочастотного внешнего момента $N(t)$

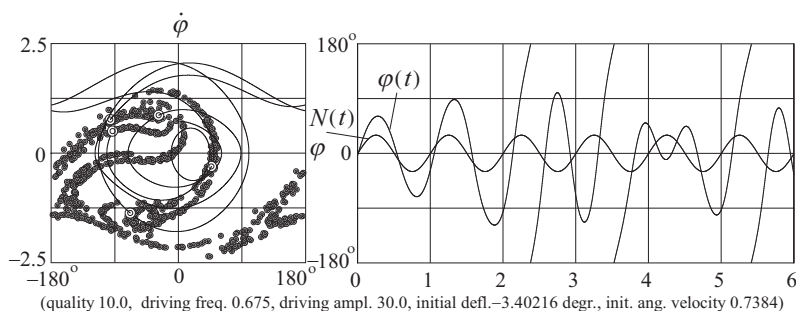


Рис. 9. Нерегулярное, хаотическое поведение маятника под действием строго периодического внешнего момента $N(t)$

даже через очень большие промежутки времени.

Рассмотренные выше примеры периодических движений маятника характеризуются устойчивыми аттракторами, то есть замкнутыми траекториями в фазовой плоскости (предельными циклами), к которым стягиваются все близкие фазовые траектории.

В процессе выхода на установившийся периодический режим система постепенно как бы «забывает» свое начальное состояние: все траектории из бассейна притяжения данного аттрактора асимптотически приближаются к определенному предельному циклу.

Происхождение динамического хаоса связано с тем, что поведение нелинейной системы в некоторых случаях оказывается необычайно чувствительным к значениям параметров и/или начальных условий. Первоначально близкие фазовые траектории, вместо дальнейшего приближения друг к другу, могут со временем очень сильно «разбегаться», удаляться одна от

другой. В таких условиях ничтожные различия в начальном состоянии системы не нивелируются, а, напротив, приводят к нарастающим отклонениям в ее долгосрочном поведении. На рис. 9 приведен пример моделирования хаотического поведения маятника. Несмотря на строго периодическую зависимость внешнего момента $N(t)$ от времени, маятник не обнаруживает тенденции к выходу на какой-либо периодический режим. Он совершает несколько колебаний с нерегулярно изменяющимся размахом, затем делает один или несколько переворотов в ту или иную сторону, затем опять застревает в одной из потенциальных ям и совершает там одно или несколько колебаний, снова делает несколько беспорядочных переворотов, и так до бесконечности. В правой части рис. 9 показан график $\varphi(t)$ для шести периодов внешнего воздействия, а в левой – соответствующий отрезок фазовой траектории с сечениями Пуанкаре. Кроме того, на фазовой плоскости показаны сечения Пуанкаре для длительной предыстории отображенного на графике небольшого временного интервала. Они дают представление о странном аттракторе данного хаотического режима. Этот аттрактор распространяется на значительную часть фазовой плоскости, а странным его называют потому,

что соответствующий ему геометрический образ представляет собой фрактал – объект дробной размерности.

В англоязычной научной литературе за описываемым поведением маятника закрепилось название «tumbling chaos», что можно перевести как «беспорядочное кувыркание» или

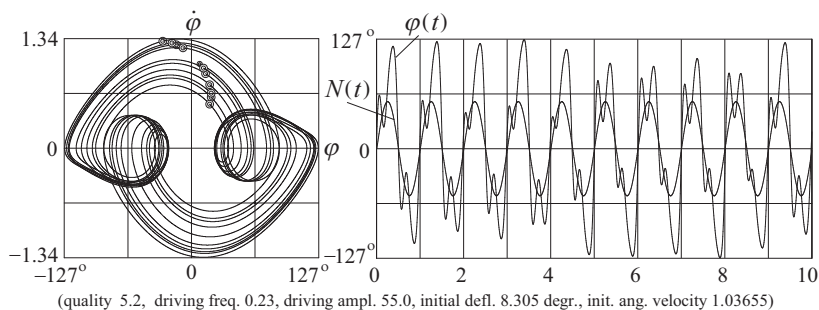


Рис. 10. Пример хаотического колебательного режима маятника под действием строго периодического внешнего момента $N(t)$

«хаотическая акробатика». Но это не единственный возможный вид хаотического поведения маятника. Хаотические режимы, как и регулярные, отличаются большим разнообразием. В частности, в определенных интервалах значений параметров системы существуют «маломасштабные» странные аттракторы, подобные показанному на рис. 10. Характерная особенность таких режимов заключается в том, что на протяжении каждого цикла внешнего воздействия (или нескольких последовательных циклов) маятник совершает похожие движения, то есть почти одинаковые последовательности переворотов и/или колебаний, но их размах в соседних последовательностях случайным образом немного отличается.

Рис. 10 дает представление о странном аттракторе колебательного режима, наблюдаемого в окрестности супергармонического резонанса третьего порядка (три собственных колебания на протяжении одного периода возбуждения). Хаотический колебательно-вращательный режим иллюстрируется на нижней части рис. 11. В течение каждых трех последовательных периодов внешнего возбуждения движение маятника напоминает $3T$ -периодический колебательно-вращательный режим, показанный на верхней части этого рисунка, но поведение в течение примыкающих трех периодов возбуждения случайным образом немного отличается. Поэтому сечения Пуанкаре, вместо трех фиксированных точек на фазовой плоскости, образуют здесь три «островка», поочередно посещаемых изображающей точкой. В пределах каждого «островка» изображающая точка

случайным образом «скачет» от посещения к посещению.

6. ПОВЕДЕНИЕ МАЯТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ МЕДЛЕННОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО МОМЕНТА С АМПЛИТУДОЙ $\theta \approx 0$

Графики потенциальной энергии $U(\varphi) \sim (1 - \cos \varphi - \theta_0 \varphi)$ маятника, на который действует постоянный момент сил θ_0 , показаны на рис. 12 для нескольких значений θ_0 . В отсутствие внешнего момента (когда $\theta_0 = 0$), устойчивые положения равновесия – минимумы $U(\varphi)$ – расположены в точках $\varphi = \pm 2\pi n$, $n = 0, 1$. Собственные колебания маятника могут происходить в одной из этих эквивалентных потенциальных ям (например около средней точки $\varphi = 0$) с частотой ω_0 . Статический внешний момент θ_0 смещает положение равновесия в точку $\varphi = \arcsin \theta_0$. Маятник остается в равновесии при действии постоянного момента, если $\theta_0 < 1$ (кривые 1 и 2 на рис. 12).

При больших значениях статического момента θ_0 минимумы потенциальной

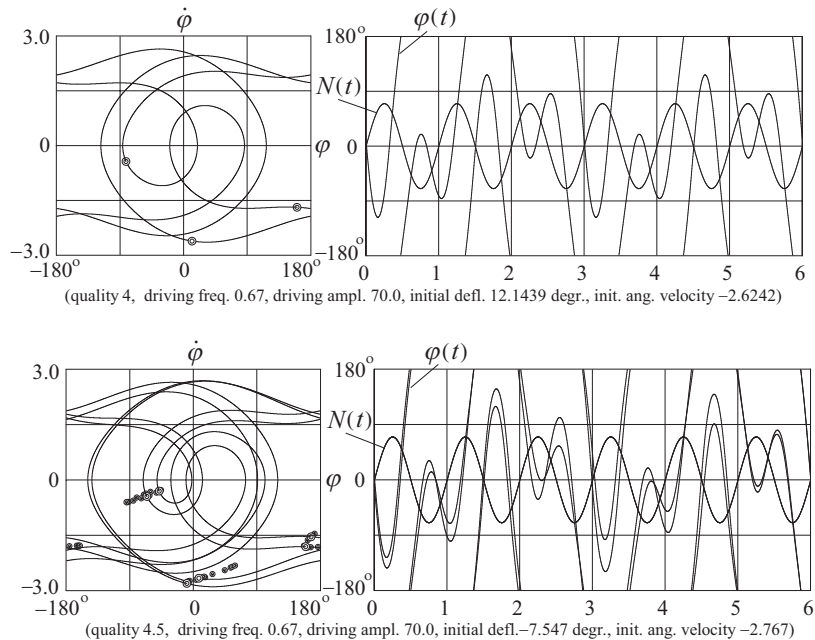


Рис. 11. $3T$ -периодический колебательно-вращательный режим маятника под действием периодического внешнего момента $N(t)$ (вверху) и родственный хаотический режим (внизу)

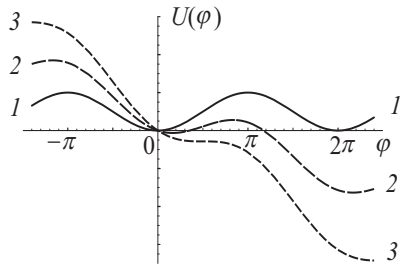


Рис. 12. Потенциальная энергия $U(\varphi) \sim (1 - \cos \varphi - \theta_0 \varphi)$ маятника, подверженного статическому моменту сил θ_0 .
Кривая 1 соответствует $\theta_0 = 0$,
кривая 2 – $\theta_0 = 0.5$, кривая 3 – $\theta_0 = 1$

энергии исчезают (кривая 3 на рис. 12), так что равновесие (а также и колебательное движение) становится невозможным: маятник совершает перевороты. Когда $\theta_0 \rightarrow 1$, статическое отклонение φ приближается к $\pi/2$, то есть маятник отклоняется до горизонтального положения.

Случай медленно изменяющегося по синусоидальному закону внешнего момента, амплитуда которого $\theta \approx 1$, заслуживает особого обсуждения. На рис. 13 показан график установившегося периодического движения при $\omega = 0.01\omega_0$ под действием внешнего момента, угловая амплитуда которого θ_0 слегка превышает 1 радиан. Обратите внимание на линейный характер зависимости $\varphi(t)$ от времени, пока внешний момент $N(t)$ медленно увеличивается по синусоидальному закону от нуля до своего максимального значения $\theta_0 = 1$.

Дальше мы попытаемся объяснить такое противоречащее интуиции поведение маятника на основе уравнения (1). В случае медленного установившегося движе-

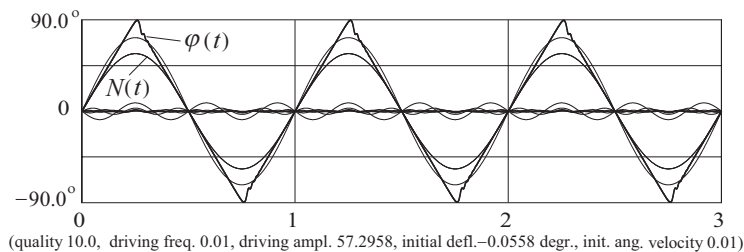


Рис. 13. Установившееся движение маятника при $\theta_0 \approx 1$ под действием синусоидального внешнего момента $N(t)$ низкой частоты ($\omega = 0.01\omega_0$). Показаны также гармоники $\varphi(t)$

ния (при $\omega \ll \omega_0$) в дифференциальном уравнении маятника можно пренебречь членами с угловой скоростью и угловым ускорением. Другими словами, можно считать, что маятник квазистатически следует за медленно изменяющимся внешним моментом, оставаясь все время в положении равновесия (в минимуме потенциальной энергии), которое отклоняется от вертикали под действием внешнего момента. Как видно из уравнения (1), при этом синус угла $\varphi(t)$ равен внешнему моменту, измеренному в угловых единицах: $\sin \varphi(t) = \theta(t) = \theta_0 \sin \omega t$. Поэтому при $\theta_0 = 1$ имеем $\sin \varphi(t) = \sin \omega t$, откуда для интервала времени $(0, T/4)$ угол отклонения маятника под действием синусоидального момента линейно возрастает со временем: $\varphi(t) = \omega t$. Угловая скорость маятника в этом медленном движении постоянна и равна круговой частоте возбуждающего момента: $\dot{\varphi}(t) = \omega$ ($\omega \ll \omega_0$).

Это значит, что на интервале $(-T/4, T/4)$ в качестве решения уравнения (1) в первом приближении можно принять линейную функцию $\varphi(t) \approx \omega t$. Аналогично для следующего интервала времени $(T/4, 3T/4)$ можно записать $\varphi(t) \approx \pi/2 - \omega(t - T/4) = \pi - \omega t$. В целом такое приближенное периодическое решение характеризуется пилообразным профилем с равнобедренными треугольными зубцами. Моделирование показывает (см. рис. 13), что прямолинейная форма зубцов вблизи их вершин слегка искажена быстрыми осцилляциями, возникающими после того как внешний момент достигает максимального значения,

и положение равновесия маятника начинает двигаться в обратную сторону. Эти быстрые осцилляции особенно отчетливо проявляются на графике угловой скорости, показанном на рис. 14. Угловая скорость $\dot{\varphi}$ выражена на нем в единицах ω_0 частоты малых собственных колебаний маятника.

Если амплитуду θ_0 внешнего момента и его частоту

сделать немного больше, чем в рассмотренном примере, то маятник сначала снова следует квазистатически за медленно изменяющимся внешним моментом, так что угол отклонения $\varphi(t)$ опять медленно возрастает со временем почти по линейному закону, пока маятник не достигнет наивысшего (почти горизонтального) положения. Однако затем вместо обращения направления своего движения вслед за положением равновесия, начинающим обратное движение, маятник «ускользает» из потенциальной ямы через ее понизившийся правый берег и начинает быстро «соскальзывать» вниз по буграм внешнего склона потенциального рельефа (см. кривые 2 и 3 на рис. 12). Это значит, что маятник «срывается» в быстрое неравномерное вращение в одном направлении. На рис. 15 приведены графики угла $\varphi(t)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ для этого экзотического движения.

Можно сделать оценку средней угловой скорости $\langle \dot{\varphi} \rangle_{\text{ав}}$ этого быстрого вращения, приравняв внешний момент в его максимуме θ_0 моменту вязкого трения, тормозящему вращение: $\omega_0^2 \theta_0 = 2\gamma \langle \dot{\varphi} \rangle_{\text{ав}}$, откуда $\langle \dot{\varphi} \rangle_{\text{ав}} \approx Q\omega_0$. Средний период $T_{\text{рот}}$ этого вращения можно оценить, положив $T_{\text{рот}} = 2\pi / \langle \dot{\varphi} \rangle_{\text{ав}} \approx T_0 / Q$, где $T_0 = 2\pi / \omega_0$ – период малых собственных колебаний маятника.

По мере приближения t к $T/2$ внешний момент $N(t)$ становится меньше, вращение маятника постепенно замедляется, и в конце концов (когда внешний момент почти обращается в нуль), маятник опять оказывается захваченным в потенциальную яму, где он совершает затухающие собственные колебания вблизи положения равновесия, равномерно движущегося назад под действием изменившегося направ-

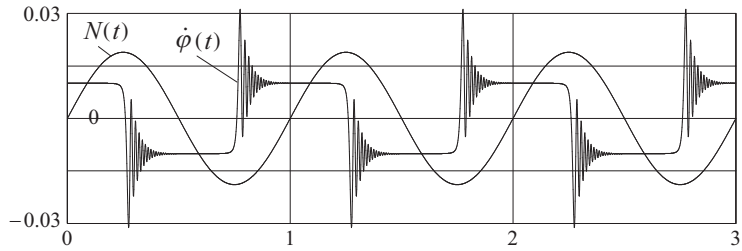


Рис. 14. Угловая скорость маятника при установившемся движении под действием низкочастотного ($\omega = 0.01\omega_0$) синусоидального внешнего момента $N(t)$, угловая амплитуда которого $\theta_0 \approx 1$

ление внешнего момента (см. верхнюю часть рис. 15).

Затем все описанное движение повторяется в противоположную сторону.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Динамика поведения хорошо всем знакомого маятника, возбуждаемого синусоидальным внешним моментом, намного богаче и разнообразней, чем можно ожидать от столь простой физической системы, полагаясь на интуицию. Колебания маятника с большими амплитудами и колебательно-вращательные режимы вряд ли можно считать простыми. Изменение параметров маятника и начальных условий приводит к поразительно разнообразным периодическим и хаотическим режимам

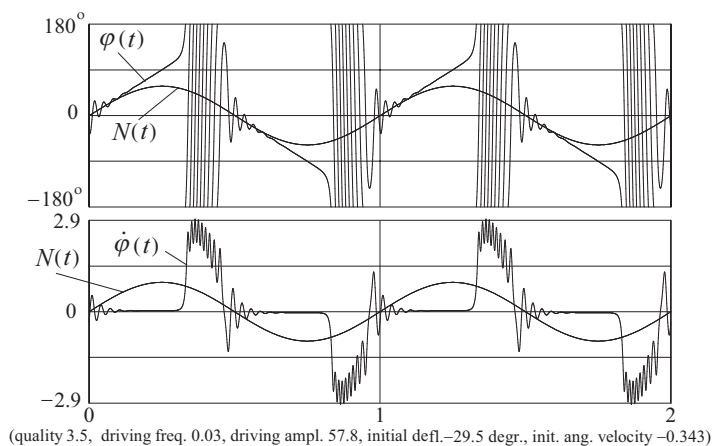


Рис. 15. Перевороты и колебания маятника под действием низкочастотного ($\omega = 0.03\omega_0$) синусоидального внешнего момента $N(t)$

его поведения. В этой статье мы затронули лишь небольшую часть существующих режимов. Прилагаемая к первому номеру журнала за этот год компьютерная программа «Маятник под действием синусоидальной силы» содержит множество за-

ранее приготовленных примеров (кроме обсуждаемых в статье), демонстрирующих многообразные особенности поведения этой знаменитой физической системы. У нас есть веские основания считать ее поистине неисчерпаемой.



Наши авторы, 2008.

Our authors, 2008.

*Бутиков Евгений Иванович,
профессор физического факультета
СПбГУ.*