

# СТАНДАРТЫ и концепции

Бутиков Евгений Иванович

## РОЛЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ОБУЧЕНИИ ФИЗИКЕ

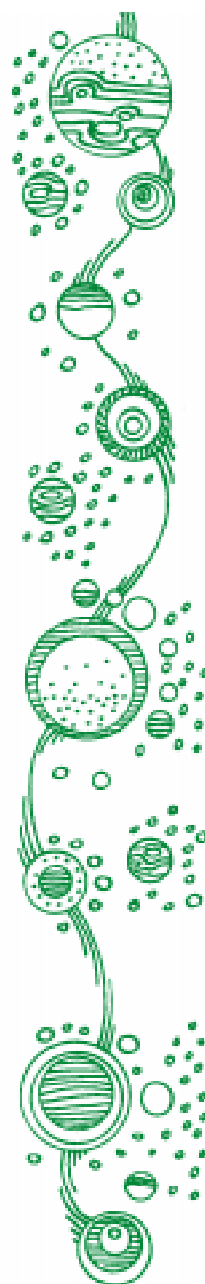
Любая современная исследовательская физическая лаборатория основательно «напичкана» компьютерами. Теперь даже трудно представить себе, как это раньше ученые жили и работали без компьютеров. Объемы информации, получаемой в экспериментах на современном оборудовании, столь велики, что «переварить» ее без предварительной автоматизированной обработки компьютерами практически невозможно. Но компьютеры приносят неоценимую пользу как при обработке результатов измерений, так и непосредственно при проведении эксперимента. Компьютерное управление экспериментальными установками и ходом эксперимента позволяет сделать физическую лабораторию с уникальным современным оборудованием потенциально доступной большому числу пользователей благодаря возможностям дистанционной работы через Интернет.

Благодаря компьютерам постепенно меняется облик не только исследовательских, но и учебных физических лабораторий, хотя происходит это, к сожалению, значительно медленнее, чем хотелось бы. Тем не менее, важная роль компьютерного управления экспериментом и необходимость автоматизированной обработки результатов измерений даже в учебной лаборатории признается всеми, и в недалеком будущем соответствующие перемены неизбежны.

Не столь очевидна ситуация с компьютерным моделированием. Все признают, что компьютерные тренажеры и имитаторы очень полезны на стадии подготовки к выполнению достаточно сложного реального эксперимента. Но о полном взаимопонимании среди педагогов относительно роли моделирования физических явлений при обучении физике говорить пока не приходится.

Общим местом стало неоспоримое утверждение о том, что при обучении физике компьютерное моделирование ни в коем случае не должно подменять собой физическую лабораторию и вытес-

*В преподавании физики компьютерное моделирование может прочно занять вполне определенную нишу. Даже моделирование физических явлений, в принципе доступных непосредственному наблюдению, имеет определенную педагогическую ценность. Компьютерное моделирование дает учащимся один из важнейших инструментов, облегчающих проникновение в тайны науки.*





нять реальный эксперимент. И это правильно. Тем не менее в преподавании физики компьютерное моделирование может прочно занять вполне определенную нишу. Речь идет не только о численном моделировании экспериментов, которые по тем или иным причинам не могут быть выполнены в учебной лаборатории. Даже моделирование физических явлений, в принципе доступных непосредственному наблюдению, имеет определенную педагогическую ценность. Компьютерное моделирование дает учащимся один из важнейших инструментов, облегчающих проникновение в тайны науки. В данной статье мы приведем некоторые общие положения относительно роли моделирования и подкрепим их примерами из собственной практики преподавания физики студентам младших курсов физического факультета СПбГУ и факультета компьютерных технологий и программирования СПбГИТМО.

С точки зрения преподавателя, очевидное, лежащее на поверхности, достоинство компьютерного моделирования заключается в возможности создавать впечатляющие и запоминающиеся зрительные образы. Такие наглядные образы способствуют пониманию и запоминанию важных деталей изучаемого явления в гораздо большей степени, нежели соответствующие математические уравнения. Моделирование позволяет придать наглядность абстрактным законам и концепциям, привлечь внимание учащихся к тонким деталям изучаемого явления, ускользающим при непосредственном наблюдении. Графическое отображение результатов моделирования на экране компьютера одновременно с анимацией изучаемого явления или процесса позволяет учащимся легко воспринимать большие объемы содержательной информации.

Разумеется, все эти преимущества моделирования можно реализовать только при использовании высококачественных программных продуктов, специально разработанных для учебного процесса. К сожалению, сложившаяся на сей день ситуация на рынке прилагаемых учебных компьютерных программ трудно назвать благополучной. Но качество существующих программ – это тема для отдельного разговора.

Интерактивный характер моделирующих компьютерных программ также является важным аргументом в пользу применения моделирования. При пассивном поглощении информации учащиеся быстро теряют интерес к предмету. Обучение становится намного эффективнее при необходимости управлять работой программы, часто взаимодействовать с ней и реагировать на ее запросы. Хорошая интерактивная компьютерная программа не должна вести учащегося по строго предопределенному пути, пусть даже и тщательно вы-

*Интерактивный характер моделирующих компьютерных программ также является важным аргументом в пользу применения моделирования. Интерактивные программы учебного назначения должны быть достаточно хорошо структурированы, чтобы студент не сбился с пути и не упустил из виду конечную цель учебного задания.*

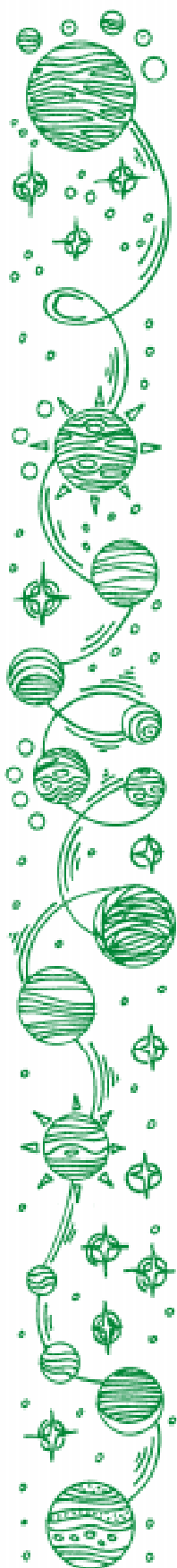
веренному автором, а, напротив, должна предоставлять выбор из множества разнообразных возможностей. В то же время чрезмерная гибкость и интерактивность программы чревата определенными опасностями. Учащийся может потерять направляющую нить, случайным образом блуждая по многочисленным закоулкам разветвленной программы. Поэтому интерактивные программы учебного назначения должны быть достаточно хорошо структурированы, чтобы студент не сбился с пути и не упустил из виду конечную цель учебного задания.

Проиллюстрируем высказанные выше соображения на примере практического использования разработанного автором комплекса учебных моделирующих программ «Движение космических тел» [1]. Комплекс имеет целью помочь студентам лучше понять и изучить фундаментальные законы физики при их применении к движениям небесных тел.\* Захватывающий воображение мир движений естественных и искусственных космических тел – это замечательная космическая лаборатория, где все явления разыгрываются в наиболее «чистом» виде, не осложненном побочными факторами вроде трения и сопротивления воздуха, неизбежными в земных лабораторных условиях. Здесь можно получить самые впечатляющие опытные подтверждения основных законов классической динамики. Но чтобы увидеть реальные кеплеровы движения планет, нужно, подобно знаменитому Тихо Браге, месяцами и даже годами и десятилетиями вести астрономические наблюдения. Затем придется пересчитать результаты выполненных на движущейся Земле наблюдений в гелиоцентрическую систему отсчета, нанести точки на бумагу и соединить их, чтобы получить истинную траекторию. Ясно, что это удел избранных – такое доступно лишь немногим астрономам-профессионалам. Замечательно, что компьютерное моделирование движений небесных тел изящно решает эту проблему: экран компьютера позволяет своими глазами увидеть то, что, казалось бы, нам никогда не дано созерцать воочию.

Программы комплекса [1] моделируют, в частности, движения тел в центральном поле тяготения, иллюстрируя законы Кеплера и предоставляя возможность их проверки в вычислительном эксперименте. Аналитическое решение задачи Кеплера о движении тела (планеты, спутника) под действием силы, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния от силового центра, можно найти в некоторых университетских учебниках по общей физике и теоретической механике (см., например, т. 1 широко известного «Курса общей физики» Д.В. Сивухина или «Механику» Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица). Задача Кеплера – это одна из немногочисленных практически важных задач, допускающих точное аналитическое решение. Но для изучения в курсе физики для школ (и для технических вузов) это решение оказывается слишком сложным. Поэтому, с точки зрения преподавания, очень полезной представляется возможность наглядной демонстрации закономерностей движения планет и спутников на компьютере путем численного моделирования, основанного

\* Более подробно познакомиться с комплексом можно по статьям автора, опубликованным в журнале «Компьютерные инструменты в образовании» в 2001 г. «Движения космических тел в компьютерных моделях. I. Задача Кеплера», № 3–4, с. 20–44, и «Движения космических тел в компьютерных моделях. II. Задача многих тел», № 5, с. 4–23.

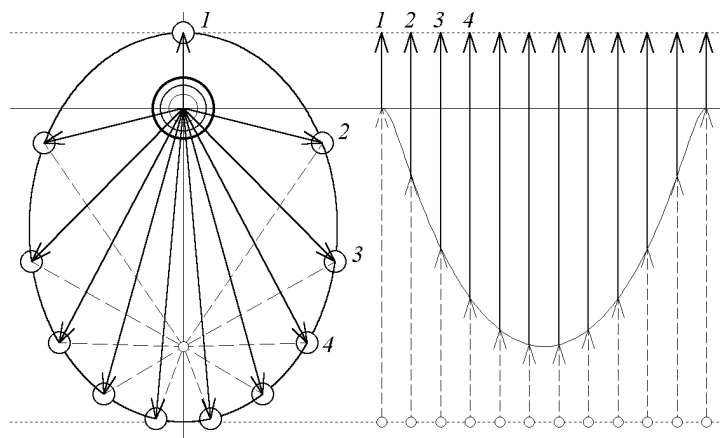




на простом для понимания алгоритме решения уравнений движения в центральном поле тяготения. Объяснить суть алгоритма проще всего, ссылаясь на то, что на малом интервале времени действующие на тело силы можно считать постоянными, так что отдельный шаг интегрирования выполняется по хорошо известным учащимся формулам равноускоренного движения.

Разумеется, компьютер может показать нам на экране движение не реальной системы, а лишь ее математической модели. И тем не менее такие моделирующие компьютерные программы можно рассматривать как еще одно экспериментальное подтверждение законов классической динамики (правда не в реальном, а в вычислительном эксперименте). В самом деле, программа рассчитывает, скажем, движение планеты вокруг Солнца, «ничего не зная» о законах Кеплера – они в программе не используются. Все, на чем основано численное моделирование планетных движений – это законы динамики и закон всемирного тяготения. И если мы видим, что моделируемое на экране движение происходит по одному из конических сечений в соответствии с законами Кеплера, то это означает, что данный вычислительный эксперимент подтверждает справедливость заложенных в модель законов физики, а тем самым и правильность наших представлений о моделируемом природном явлении.

В моделирующей компьютерной программе пакета «Движение космических тел», иллюстрирующей первый закон Кеплера, дается наглядное доказательство того, что траектория планеты – именно эллипс, а не овал или какая-либо иная замкнутая кривая. Доказательство основано на известном геометрическом свойстве эллипса, согласно которому для любой точки эллипса сумма расстояний до двух заданных точек (фокусов) имеет одно и то же значение (это утверждение можно рассматривать как *определение* эллипса). В левой части экрана (см. рисунок 1) путем численного интегрирования уравнений движения строится траектория планеты. Через равные



**Рисунок 1.** Кеплерова орбита планеты (слева) и геометрическое сложение отрезков от фокусов до планеты. Совпадающие цифры в левой и правой частях соответствуют одним и тем же моментам времени.

промежутки времени к центру планеты проводятся отрезки из силового центра (центра Солнца), где, согласно первому закону Кеплера должен находиться один из фокусов эллиптической орбиты. На приводимом рисунке эти радиусы-векторы планеты показаны стрелками. Одновременно проводятся отрезки, соединяющие центр планеты со вторым фокусом орбиты. Эти отрезки на рисунке показаны штриховыми линиями.

В правой части экрана эти же отрезки от данной точки орбиты до фокусов отложены вдоль одной прямой друг за другом, чтобы было легко определить на глаз сумму длин этих отрезков. Мы видим, что эта сумма оказывается одинаковой для всех точек орбиты. Отсюда следует, что траектория, получающаяся в результате численного интегрирования уравнения второго закона Ньютона для движения под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния, действительно представляет собой эллипс, один из фокусов которого находится в силовом центре. Сумма длин отрезков от любой точки траектории до фокусов равна большой оси этого эллипса.

Еще одно подтверждение тому, что наблюдаемое при моделировании движение происходит именно по эллипсу, можно получить, если перед моделированием выбрать в меню опцию предварительного построения на экране теоретически рассчитанной траектории, то есть траектории, полученной путем аналитического решения задачи Кеплера. В процессе моделирования мы видим, что численно рассчитываемая траектория действительно совпадает с эллипсом, построенным предварительно с помощью аналитического решения.

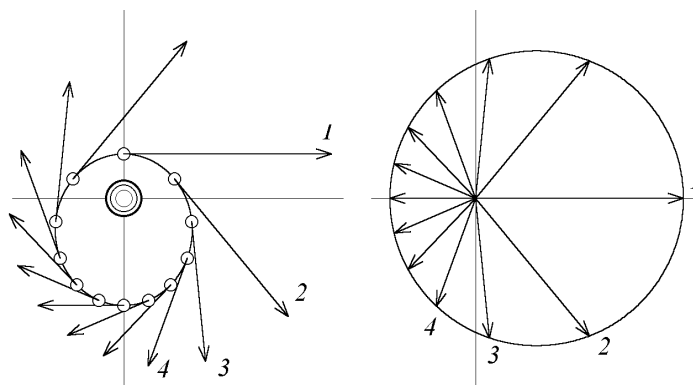
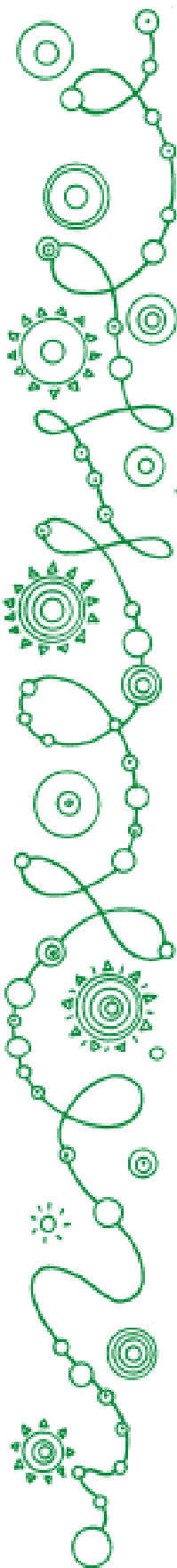
Движение планеты отображается при моделировании в определенном масштабе времени. Поэтому при наблюдении ясно видно, как изменяется гелиоцентрическая скорость планеты при движении по орбите. Отрезки от фокусов до планеты проводятся через равные промежутки времени. Поэтому об изменениях скорости можно судить даже по статической картинке, остающейся на экране по окончании моделирования. Кривую в правой части рисунка 1, разделяющую сплошные и штриховые отрезки, можно рассматривать как график временной зависимости расстояния планеты от Солнца при движении по орбите (если считать, что ось ординат на нем направлена вниз).

Интерактивный аспект моделирования сводится к выбору условий отображения движения и к заданию параметров, характеризующих моделируемую систему. В рассматриваемом примере таким параметром является скорость планеты в перигелии. При разных значениях начальной скорости получаются эллиптические орбиты с разными размерами и эксцентриситетами, но в любом случае сумма отрезков до фокусов одинакова для всех точек орбиты.

Одно из интереснейших свойств кеплеровых движений связано с формой траектории в пространстве скоростей. Вектор скорос-



*Вычислительный эксперимент – это метод изучения физического явления путем построения его математической модели и последующего численного исследования этой модели, позволяющего «проиграть» ее поведение в различных условиях.*



**Рисунок 2.** Кеплерова орбита спутника и векторы скоростей в разных ее точках (слева), и годограф вектора скорости в пространстве скоростей (справа). Совпадающие цифры слева и справа соответствуют одним и тем же моментам времени.

ти тела (планеты, спутника) в каждый момент времени направлен по касательной к пространственной траектории тела. При криволинейном движении направление вектора скорости непрерывно изменяется. Для получения траектории в пространстве скоростей нужно эти векторы скоростей для каждого момента времени начертить так, чтобы все они начинались в общей точке – начале координат пространства скоростей. Конец этого изменяющегося вектора скорости вычерчивает некоторую кривую в пространстве скоростей, называемую *годографом* вектора скорости. Это ныне общепринятое название для траектории в пространстве скоростей было предложено Гамильтоном в 1846 году. Замечательно, что при кеплеровом движении по любой эллиптической орбите годограф скорости представляет собой *окружность*. Для круговой орбиты это очевидно: при равномерном движении тела по окружности вектор скорости просто равномерно поворачивается, оставаясь неизменным по модулю. Ясно, что в пространстве скоростей конец такого вектора вычерчивает окружность. Для эллиптической орбиты поворот вектора скорости происходит неравномерно, и его модуль при этом все время изменяется. Но оказывается, что и в этом случае конец вектора в пространстве скоростей вычерчивает окружность (рисунок 2).

Нижняя половина кругового годографа, начинающаяся в точке 1 на рисунке 2, соответствует первой (правой) половине эллиптической орбиты от перигелия до афелия, которую планета проходит (по часовой стрелке) с постепенно уменьшающейся скоростью. Вторая (верхняя на рисунке 2) половина годографа скорости соответствует второй (левой) половине орбиты от афелия до перигелия, при прохождении вдоль которой скорость планеты постепенно увеличивается. Статическая картина на рисунке 2 (и тем более аналитическое доказательство круговой формы годографа скорости) не производит, разумеется, такого сильного впечатления, как непосредственное наблюдение этой динамичной демонстрации на экране компьютера.

Еще один важный аспект особой роли компьютерного моделирования в преподавании физики связан с самой парадигмой фи-

зического исследования. Физики считают, что понимают некоторое физическое явление, если могут предложить для него достаточно простую математическую модель, в основу которой положены твердо установленные фундаментальные законы. Обычно такие математические модели физических систем или явлений выражаются дифференциальными уравнениями. В некоторых случаях в рамках принятой модели удается получить точное или приближенное аналитическое решение поставленной задачи. К сожалению, точные аналитические решения редко встречаются в физике. Часто бывает так, что даже для очень простых моделей дифференциальные уравнения не имеют аналитического решения. В таких случаях без опоры на численные методы практически невозможно понять свойства предложенной математической модели явления и сделать какие-либо заключения о ее соответствии реальной действительности, а тем самым и о нашем понимании изучаемого явления. Правильность наших представлений о реальном изучаемом явлении можно проверить с помощью вычислительного эксперимента на компьютере.

Вычислительный эксперимент – это метод изучения физического явления путем построения его математической модели и последующего численного исследования этой модели, позволяющего «проиграть» ее поведение в различных условиях.

Поэтому для современного этапа развития физической науки характерно становление (в дополнение к экспериментальной и теоретической физике) третьей ее ветви – *вычислительной физики*, в основе которой лежит компьютерное моделирование физических явлений. Эта тенденция безусловно должна найти отражение и в преподавании физики. Компьютерный эксперимент, выполняемый не с реальной физической системой, а с ее математической моделью, не только во многом обогащает и облегчает изучение фундаментальных принципов и традиционных разделов курса физики, но и дает ключ к изучению многих трудных для усвоения вопросов, недоступных традиционным методам. В частности, с помощью компьютерных моделей можно изучать нелинейные явления, где аналитические методы зачастую оказываются бессильными.

Следующий пример из пакета «Движение космических тел» [1] иллюстрирует сложность возможных движений в системе трех тел, связанных гравитационным взаимодействием. Самые удивительные эффекты в небесной механике проявляются при исследовании задачи трех (и многих) тел, тяготеющих друг к другу. Когда масса третьего тела пренебрежимо мала по сравнению с массами двух других, его влияние на движение массивных тел пренебрежимо мало. Это значит, что в такой *ограниченной задаче трех тел* движение массивных тел происходит в соответствии с законами Кеплера (движение планеты вокруг звезды на рисунке 3). Но движение третьего тела (легкого спутника) при этом может быть необычайно сложным.

*Моделирование достаточно сложных явлений может способствовать не только облегчению понимания определенного вопроса, но и развитию физической интуиции учащихся.*

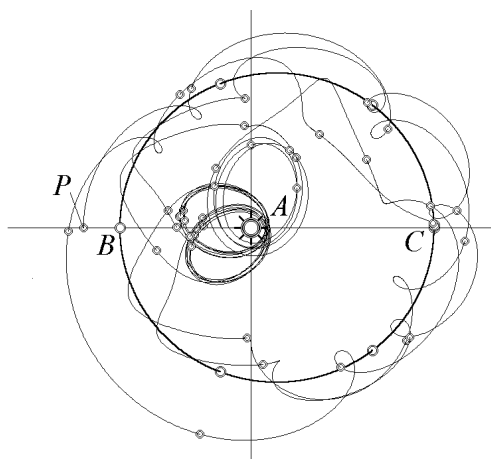




Возможны очень интересные движения, сопровождающиеся переходом спутника от обращения вокруг планеты к обращению вокруг звезды (когда спутник превращается в самостоятельную планету). Может оказаться, что через некоторое время такой потерянный планетой спутник снова окажется захваченным планетой. Подобная «перепасовка» спутником между планетой и звездой в этом «космическом баскетболе» может повторяться неоднократно. Рисунок 3 дает пример такого хаотического движения спутника некоторой планеты, обращающейся вокруг звезды по эллиптической орбите с небольшим эксцентриситетом. Разумеется, и здесь динамическая картина движения на экране компьютера производит неизмеримо более сильное впечатление по сравнению со статичным рисунком 3.

Это один из многочисленных примеров необычайно сложного поведения систем, подчиняющихся простым и строгим физическим законам. Можно думать, что отсутствие аналитических решений уравнений динамики в подобных случаях отражает не столько бессилие математики, сколько возможную сложность самих движений даже в весьма простых механических системах, описываемых нелинейными уравнениями. Для нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих хаотическое движение, характерна чрезвычайно сильная чувствительность к значениям параметров и к начальным условиям: ничтожное изменение параметров системы и/или ее начального состояния может привести к радикальным изменениям в долгосрочном поведении системы. В этом легко убедиться с помощью интерактивной моделирующей программы.

Подчеркнем, что моделирование достаточно сложных явлений может способствовать не только облегчению понимания определенного вопроса, но и, что не менее важно, развитию физической интуиции учащихся. Последующее обращение к математической модели, положенной в основу численного моделирования явления, может показать, что даже из очень простых предположений о модели и математически простых фундаментальных закономерностей вытека-



**Рисунок 3.** Причудливая траектория спутника, поочередно обращающегося вокруг планеты и вокруг звезды (гелиоцентрическая система отсчета). Движение планеты происходит в соответствии с законами Кеплера.



ет очень сложное поведение физической системы. Без обращения к компьютерному моделированию было бы чрезвычайно трудно увидеть, что простые математические уравнения приводят к столь сложному поведению. Для физика недостаточно знать только сами уравнения. Очень важно понимать, хотя бы на интуитивном уровне, как эти уравнения «работают» в реальном мире в тех случаях, когда невозможно получить их аналитические решения.

При проведении учебного курса, основанного на использовании компьютерных программ, преподавателю необходимо тщательно продумать последовательность изучения материала. Чаще всего в математизированных курсах за основу берется принцип «от простого к сложному». Однако в некоторых случаях может быть педагогически целесообразным отступление от такой последовательности с тем, чтобы сначала воспользоваться моделированием сложного, но физически значимого и интуитивно понятного явления с последующим раскрытием лежащих в основе закономерностей и постепенным углублением в необходимую для его описания математику. Такое обращение традиционной последовательности, помимо повышения мотивации к преодолению порою скучных азов изучаемой дисциплины, способствует формированию у учащегося некоторых пусть и расплывчатых, полуинтуитивных, но очень полезных представлений о том, как «устроен мир», складывающихся на основе личного практического опыта, накопленного в том числе и при интерактивном использовании компьютерных моделей.

Для успешного использования моделирующих программ в сопровождающем учебном пособии должны быть приведены необходимые сведения из теории изучаемых явлений. В пособии должна быть описана принятая математическая модель явления, предложены теоретические задачи и сформулированы конкретные задания для экспериментальной работы на компьютере.

Несомненно, что наиболее эффективные учебные моделирующие компьютерные программы должны представлять собой не просто электронное дополнение к традиционному учебнику, а по существу своего рода *настольную лабораторию* для индивидуальной интерактивной работы учащегося с математической моделью изучаемого физического явления. Если проводить параллель с экспериментальной физикой, то этому подходу соответствует работа на уже готовой и тщательно отлаженной экспериментальной установке. Студент получает возможность сосредоточиться на физике изучаемых явлений, не отвлекаясь на чисто технические проблемы моделирования. Моделирующие программы принципиально отличаются от традиционных компьютерных обучающих и контролирующих программ, так как именно при моделировании физических явлений по-настоящему используются предоставляемые компьютером уникальные возможности. Работа с моделирующими программами может составить основу для курсового или дипломного проекта, так как по своему характеру эта работа во многом сходна с небольшим научным исследованием, в котором студент играет активную роль. В некоторых случаях компьютерное моделирование может даже подсказать пути нахождения аналитического решения поставленной задачи.





Проиллюстрируем рассматриваемую роль моделирования на примере практического применения разработанного автором цикла программ «Физика колебаний» [2]. Цикл вместе с сопутствующими методическими материалами предназначен для учебной студенческой лаборатории компьютерного моделирования по физике.\* В него включены важные в принципиальном и практическом отношении вопросы собственных, вынужденных и параметрических колебаний в простых линейных и нелинейных физических системах. Модульная структура компьютерных программ комплекса и учебного пособия допускают возможность разной глубины изучения материала. Поэтому комплекс может быть легко адаптирован к конкретным условиям различных вузов.

Выбор механических колебательных систем для моделирования обусловлен важной в методическом отношении возможностью отобразить их движение непосредственно на экране компьютера, наряду с фазовыми траекториями и графиками временной зависимости описывающих систему переменных. Визуализация движения с одновременным выводом графиков значительно облегчает понимание многих абстрактных концепций физики колебаний.

Если задаться вопросом, какой физический прибор оставил наиболее глубокий след в истории физики, скорее всего первая мысль будет о маятнике. Начиная с опытов Галилея в XVI веке и вплоть до наших дней, простой маятник используется в разнообразных приборах для измерения времени и напряженности гравитационного поля и, что не менее важно, служит пробным камнем для многих физических теорий. Эта знаменитая механическая система интересна и полезна не только сама по себе как наиболее знакомый пример нелинейного механического осциллятора, но главным образом потому, что многие задачи в разных областях современной физики приводятся к дифференциальному уравнению, описывающему движение маятника. Теория солитонов (уединенных волн в нелинейной среде с дисперсией), эффекты Джозефсона в слабой сверхпроводимости, сверхизлучение в квантовой оптике, процессы генерации лазеров – вот лишь некоторые наиболее известные примеры. Механические аналоги физических систем допускают прямую визуализацию движения и этим очень полезны для формирования интуитивных представлений о сложных явлениях. Детально разобравшись с поведением механической системы и используя аналогию между колебательными системами разной физической природы, можно значительно продвинуться в понимании разнообразных электромагнитных и оптических нелинейных явлений, где все далеко не так наглядно, хотя системы описываются такими же дифференциальными уравнениями.

Одна из программ пакета «Физика колебаний» моделирует движение математического маятника в виде точечной массы в однородном поле тяготения, закрепленной на конце невесомого стержня, который может свободно поворачиваться вокруг горизонталь-

\* Представление об организации комплекса «Физика колебаний» можно получить из статьи автора «Лаборатория компьютерного моделирования», опубликованной в журнале «Компьютерные инструменты в образовании» за 1999 год, № 5, стр. 24 – 39.

ной оси. Та же модель в равной мере применима и к поведению физического маятника, то есть шарнирно закрепленного произвольного твердого тела (а не только точечной массы), так как обе системы описываются одним и тем же нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

В отсутствие трения маятник характеризуется единственным параметром  $\omega_0$ , который имеет смысл частоты малых колебаний:  $\omega_0^2 = g/l$ , где  $g$  – ускорение свободного падения,  $l$  – длина маятника (для физического маятника – приведенная длина  $l = I/ma$ , где  $I$  – момент инерции,  $a$  – расстояние от оси до центра масс). Нелинейный характер уравнения (1) проявляется прежде всего в зависимости частоты  $\omega$  (и периода  $T = 2\pi/\omega$ ) собственных колебаний от амплитуды  $\varphi_m$ . Уравнение (1) не имеет точного решения в элементарных функциях. Приближенную формулу для зависимости периода колебаний от амплитуды можно получить, разлагая  $\sin \varphi$  в уравнении (1) в ряд по степеням  $\varphi$ . Сохраняя первые два члена разложения, получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi - \frac{1}{6} \omega_0^2 \varphi^3 = 0. \quad (2)$$

Можно искать приближенное решение уравнения (2) в виде суперпозиции синусоидального колебания  $\varphi(t) = \varphi_m \cos \omega t$  с некоторой (пока неопределенной) частотой  $\omega$  и амплитудой  $\varphi_m$  и его третьей гармоники  $\varepsilon \varphi_m \cos(3\omega t)$  (мы принимаем момент максимального отклонения маятника за начало отсчета времени  $t = 0$ ). Такое решение приведено во многих учебниках (см., например, [3]). Относительный вклад третьей гармоники  $\varepsilon$  оказывается равным  $\varphi_m^2/192$ , где  $\varphi_m$  – амплитуда основной гармоники, частота  $\omega$  которой получается меньшей, чем частота  $\omega_0$  предельно малых колебаний на величину, пропорциональную квадрату амплитуды  $\varphi_m$ :

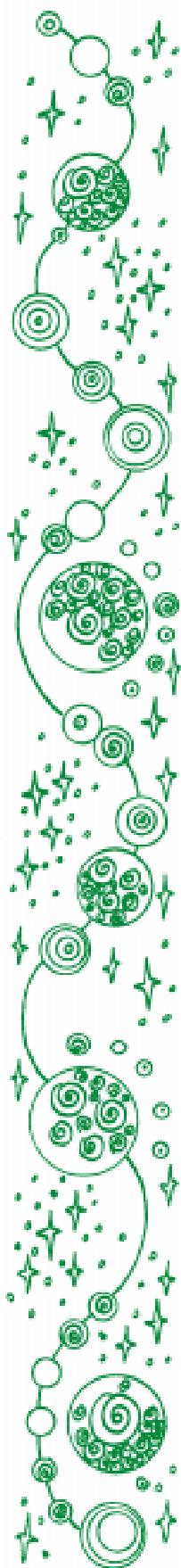
$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{16} \varphi_m^2\right); \quad T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_m^2\right). \quad (3)$$

Формула (3) показывает, что при размахе колебаний  $\varphi_m$ , скажем, в  $30^\circ$  (0,52 рад) относительное увеличение периода (по сравнению с периодом предельно малых колебаний) составляет 0,017

Таблица 1

Амплитуда	$T/T_0$	
	Расчет по формуле (3)	Эксперимент
$30^\circ$	1,0171	1,0175
$45^\circ$	1,0386	1,0400
$60^\circ$	1,0685	1,0732
$90^\circ$	1,1539	1,1803
$120^\circ$	1,2742	1,3730
$135^\circ$	1,3470	1,5279
$150^\circ$	1,4284	1,7622





(т. е. 1,7%). Относительный вклад третьей гармоники в такое несинусоидальное колебание равен 0,14%, то есть ее амплитуда равна всего лишь  $0,043^\circ$ . В одном из заданий к лабораторной работе студенту предлагается проверить на опыте приближенную теоретическую формулу (3) для периода колебаний. В таблице 1 приведены (для нескольких значений амплитуды колебаний) значения периода  $T$ , рассчитанные с помощью формулы (3) и измеренные в моделирующем эксперименте. Сравнивая второй и третий столбцы таблицы, можно заключить, что при размахе колебаний в  $45^\circ$  приближенная формула (3) дает значение периода с ошибкой всего 0,13%. Однако при размахе колебаний в  $90^\circ$  ошибка составляет уже 2,24%. Погрешность формулы (3) не превышает 1% для амплитуд вплоть до  $70^\circ$ .

Подобную проверку приближенной формулы (3) для зависимости периода колебаний маятника от амплитуды можно выполнять, разумеется, и в экспериментах с настоящим маятником, не прибегая к моделированию. Для получения хороших результатов, особенно при сравнительно больших амплитудах, используемый маятник должен быть весьма прецизионным, а потому с неизбежностью очень дорогим. Но главное достоинство моделирующего эксперимента заключается отнюдь не в возможности обойтись без дорогостоящего прибора. Даже самый совершенный прибор не в состоянии обеспечить сколько-нибудь надежных измерений при амплитудах, приближающихся к  $180^\circ$  – ничтожное трение совершенно исказит картину колебаний. Но именно такие движения интересны, когда аналогия с маятником используется, скажем, при изучении солитонов. Компьютерный эксперимент и в таких случаях может дать исчерпывающие ответы на интересующие нас вопросы.

При больших углах отклонения маятника возвращающий момент силы тяжести растет не так быстро, как у гармонического осциллятора. Поэтому говорят, что маятник представляет собой осциллятор с «мягкой» возвращающей силой. Крутизна берегов потенциальной ямы маятника уменьшается по мере приближения к вершинам окружающих ее потенциальных барьеров, и поэтому с увеличением амплитуды маятник все больше времени проводит в окрестностях точек максимального отклонения (точек поворота), где происходит обращение направления его движения. Именно с этим обстоятельством связан рост периода с увеличением амплитуды. Чем больше размах колебаний, тем сильнее графики зависимости от времени отличаются от синусоид: на графике угла отклонения вершины уплощаются, в то время как на графике угловой скорости вершины становятся острее. Эти особенности хорошо видны на рисунке 4, где показаны графики колебаний с амплитудой  $170^\circ$ , полученные в моделирующем эксперименте (за единицу времени принят период предельно малых колебаний). Так как при больших колебаниях маятник большую часть периода колебаний проводит в медленном движении вблизи точек наибольшего отклонения, где его потенциальная энергия близка к своему максимальному значению, а кинетическая очень мала, среднее за период значение потенциальной энергии значительно больше среднего значения

кинетической, в противоположность малым колебаниям, при которых средние за период значения двух видов энергии одинаковы.

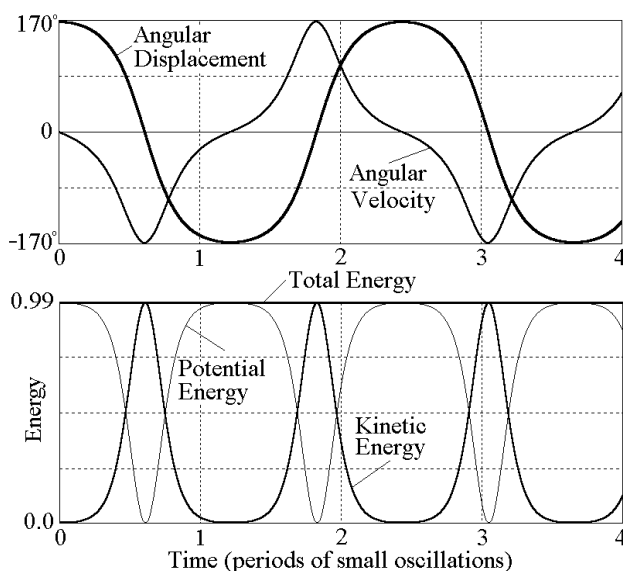
Особый интерес представляет движение маятника с полной энергией, равной потенциальной энергии в перевернутом положении. Этот вид движения называют *лимитационным*, так как он разделяет два типа возможных движений: колебания и перевороты (вращения) маятника. В этом частном случае уравнение (3) имеет аналитическое решение в элементарных функциях. Его можно найти, воспользовавшись законом сохранения энергии. При  $E = 2mgl$  из закона сохранения энергии вытекает следующая зависимость угловой скорости от угла отклонения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2). \quad (4)$$

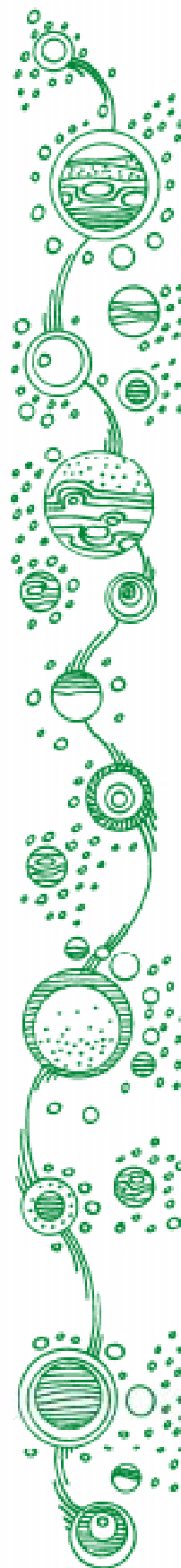
Как видно из (4), по мере приближения маятника к перевернутому положению  $\varphi = \pi$  или  $\varphi = -\pi$  угловая скорость неограниченно уменьшается, обращаясь в нуль в самой точке  $\varphi = \pm \pi$ . Здесь маятник покоится в положении неустойчивого равновесия. Сколь угодно малое начальное отклонение маятника из этого положения в ту или другую сторону приведет к колебаниям с амплитудой почти  $180^\circ$ , в то время как сколь угодно малый начальный толчок вызовет перевороты маятника, то есть приведет к вращению в одном направлении. При таких колебаниях или переворотах маятник большую часть времени проводит в окрестности перевернутого положения.

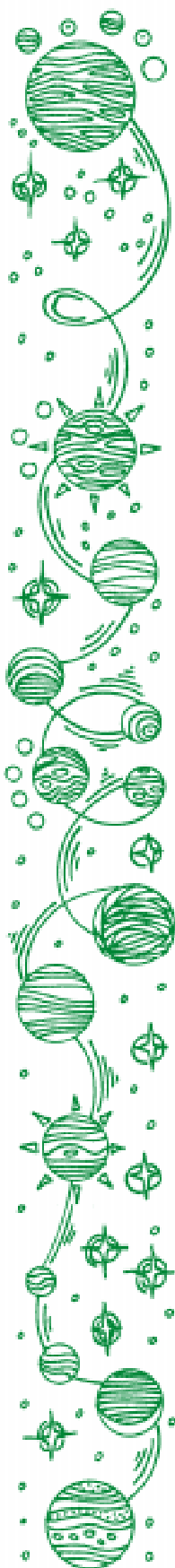
Из уравнения (4) легко найти зависимость угла отклонения от времени для лимитационного движения. Выбрав знак «+» и интегрируя (4) при начальном условии  $\varphi(0) = 0$ , получаем:

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}). \quad (5)$$



**Рисунок 4.** Графики колебаний с большой амплитудой в отсутствие трения ( $\varphi_m = 170^\circ$ ), полученные при моделировании.





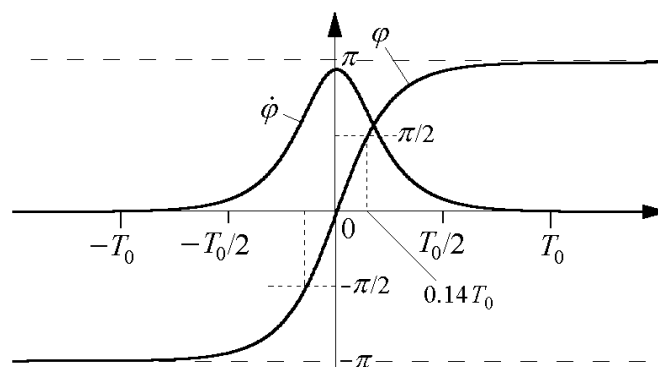
Это решение описывает движение против часовой стрелки, начинающееся при  $t = -\infty$  из положения  $\varphi = -\pi$  с нулевой начальной скоростью. При  $t = 0$  маятник проходит через нижнюю точку своей круговой траектории и продолжает движение дальше, асимптотически приближаясь к перевернутому положению  $\varphi = +\pi$ . График этого движения показан на рисунке 5.

Второе решение, соответствующее выбору знака « $\rightarrow$ » в уравнении (4), то есть движению по часовой стрелке, получается из (5) обращением знака времени. Решения при других начальных условиях получаются из (5) сдвигом начала отсчета времени, то есть заменой  $t$  на  $t - t_0$ . Зависимость угловой скорости от времени при лимитационном движении можно получить, выражая  $\cos(\varphi/2)$  из (5) и подставляя в (4):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}. \quad (6)$$

График этой функции (см. рисунок 5) имеет вид одиночного импульса. Начало отсчета времени  $t = 0$  выбрано в (6) момент, когда маятник проходит через нижнее положение равновесия с угловой скоростью  $2\omega_0$ . Для моментов времени  $t = \pm T_0/2$  по обе стороны от пика значение угловой скорости, как следует из (6), составляет лишь  $0.17\omega_0$ . Поэтому приблизительно можно принять период малых колебаний  $T_0$  за длительность импульса на графике скорости лимитационного движения. Другими словами,  $T_0$  дает оценку времени, в течение которого маятник проходит почти весь свой круговой путь от одной окрестности перевернутого положения через нижнюю точку до другой его стороны. Как видно из (6), крылья контура  $d\varphi/dt$  спадают экспоненциально при  $t = \pm \infty$ . В самом деле, при больших  $t$  можно пренебречь вторым слагаемым  $\exp(-\omega_0 t)$  в знаменателе (6), что дает  $d\varphi/dt = \pm 4\omega_0 \exp(-\omega_0 t)$ . Таким образом, когда полная энергия маятника в точности равна высоте потенциального барьера, угловая скорость маятника экспоненциально уменьшается по мере того, как он асимптотически (бесконечно долго) приближается к вершине барьера, то есть к неустойчивому положению равновесия. Это движение не периодически.

Используя выражение (5) для зависимости угла отклонения от времени, можно найти интервал времени  $\tau$ , в течение которого маятник движется от одного горизонтального положения до другого через



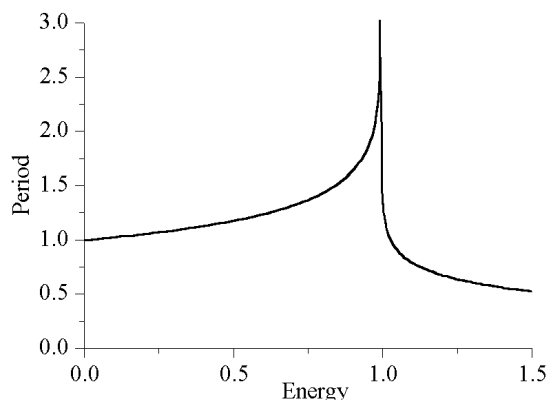
**Рисунок 5.** Зависимость угла отклонения и угловой скорости от времени в случае лимитационного движения маятника.

нижнюю точку:  $\tau = 0,28T_0$ . В течение этого промежутка времени кинетическая энергия маятника больше потенциальной. Поэтому время  $\tau$  равно полуширине (ширине на половине высоты) одиночного импульса кинетической энергии для лимитационного движения.

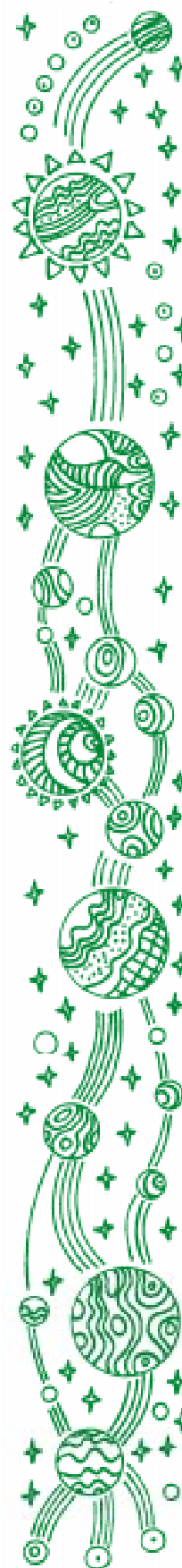
Когда полная энергия отличается от критического значения  $E_m = 2mgl$ , движение маятника периодически (колебания при  $E < E_m$  и вращение при  $E > E_m$ ). Период  $T$  такого движения возрастает неограниченно, если энергия приближается к  $E_m$  как со стороны больших, так и меньших значений. Рисунок 6 показывает зависимость периода от полной энергии  $T(E)$ , полученную с помощью моделирующего эксперимента.

Начальный участок графика показывает почти линейный рост периода с энергией, что соответствует приближенной формуле (3), так как при малых колебаниях полная энергия маятника приблизительно пропорциональна квадрату амплитуды:  $E \sim \varphi_m^2$ . Такую закономерность, справедливую для колебаний со сравнительно небольшими амплитудами, разумеется, можно проверить, экспериментируя с настоящим маятником и не обращаясь к моделированию. Но совсем иное дело, если нас интересуют колебания с амплитудами, приближающимися к  $180^\circ$ , то есть движение, близкое к лимитационному. При  $E \sim E_m = 2mgl$  тонкие детали зависимости периода от амплитуды в натурном эксперименте установить невозможно. Напротив, моделирование позволяет выполнить точные измерения периода и в то же время увидеть возможный путь для теоретического расчета. В одном из заданий к этой лабораторной работе студенту предлагается исследовать зависимость периода колебаний от амплитуды при  $\varphi_m \rightarrow \pi$ .

Выполняя моделирование колебаний маятника с амплитудами  $\varphi_m$ , равными  $179,900^\circ$ ,  $179,990^\circ$  и  $179,999^\circ$ , при сравнении графиков скорости (см. рисунок 7) можно увидеть, что длительность импульсов в этих случаях практически одинакова, но интервалы между пиками (то есть периоды колебаний) возрастают по мере приближения амплитуды к  $180^\circ$ . Экспериментальные значения периодов таких необычных колебаний составляют соответственно  $5,5T_0$ ,  $6,8T_0$  и  $8,3T_0$ . Из графиков хорошо видно, что все это различие в периодах



**Рисунок 6.** Период как функция полной энергии  $E$  (отношения  $E/E_m$ ) для колебаний и переворотов в отсутствие трения.





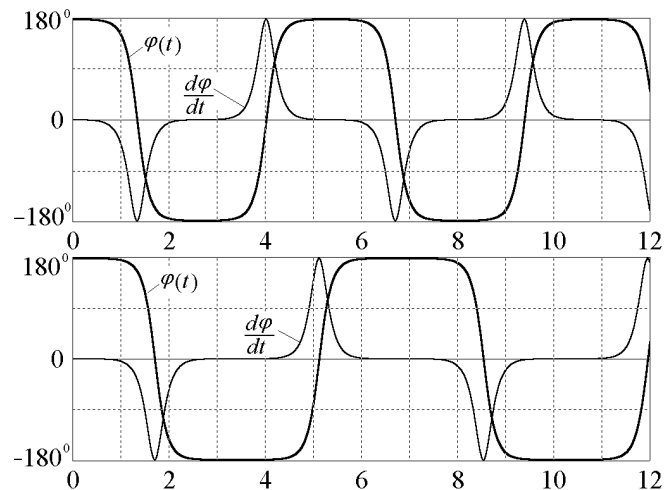
накапливается при очень медленном движении маятника в непосредственной близости перевернутого положения, в то время как большая часть кругового пути через нижнее положение равновесия описывается практически неотличимыми графиками, почти совпадающими с графиком лимитационного движения. Это значит, что весь путь маятника от нижнего положения равновесия до точки наибольшего отклонения можно мысленно разделить на две характерные части: одна часть (одинаковая для всех трех рассматриваемых случаев) простирается от нижней точки  $\varphi = 0$  до некоторого произвольно выбранного угла  $\varphi_c$  (например,  $\varphi_c = 175^\circ$ ), а вторая часть – от  $\varphi_c$  до максимального отклонения  $\varphi_m$  (разного в трех случаях). С хорошей точностью время движения маятника от  $\varphi = 0$  до  $\varphi_c$  (обозначим это время через  $t_1$ ) можно найти, считая, что рассматриваемое движение совпадает с лимитационным. Для этого воспользуемся известным аналитическим решением (5), подставляя в него  $\varphi = \varphi_c$  при  $t = t_1$ :

$$\pi - \varphi_c = 4 \arctan(e^{-\alpha_c t_1}). \quad (7)$$

Так как  $\varphi_c$  выбран весьма близким к  $\pi$  (скажем,  $\varphi_c = 175^\circ$ ), угол  $\pi - \varphi_c$  (обозначим его  $\alpha_c$ ) можно считать малым, так что тангенс  $\alpha_c/4$  практически совпадает с аргументом ( $\text{tg}(\alpha_c/4) \approx \alpha_c/4$ ). Таким образом, из (7) получаем:

$$t_1 \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{4}{\alpha_c}. \quad (8)$$

Время  $t_1$  зависит, конечно, от  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ , то есть от положения точки, которую мы выбрали для деления всего пути на две части. Дальнейшее движение маятника от  $\varphi_c$  до максимального отклонения  $\varphi_m$ , происходящее в малой окрестности перевернутого положения, можно рассматривать с помощью линеаризованного уравнения движения. Для этого в точном уравнении (1) перейдем к новой пере-



**Рисунок 7.** Графики угла отклонения и угловой скорости при колебаниях в отсутствие трения с большими амплитудами ( $\varphi_m = 179,90^\circ$  на верхних графиках и  $\varphi_m = 179,99^\circ$  на нижних), полученные при моделировании.



менной  $\alpha = \pi - \varphi$ . Другими словами, мгновенное положение маятника будем отсчитывать не от нижнего, а от верхнего положения равновесия. Тогда в (1) можно положить  $\sin \alpha \approx \alpha$ , и уравнение для  $\alpha$  принимает вид:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \omega_0^2\alpha = 0. \quad (9)$$

Общее решение этого линейного уравнения имеет вид суперпозиции двух экспонент:

$$\alpha(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}. \quad (10)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из начальных условий. Здесь удобно, пользуясь обратимостью движения маятника, выбрать начало отсчета времени в точке поворота  $\varphi_m$ , то есть, вместо движения вверх от  $\varphi_c$  до  $\varphi_m$ , происходящего в течение искомого времени  $t_2$ , рассмотреть обратное движение от точки поворота  $\varphi_m$  до  $\varphi_c$ . Ясно, что оно потребует точно такого же времени  $t_2$ . Тогда в начальный момент  $d\alpha/dt = 0$ , откуда  $C_1 = C_2$ . Из второго начального условия  $\alpha(0) = \alpha_m = \pi - \varphi_m$  находим  $C_1 = \alpha_m/2$ . Далее, подставляем в (10)  $\alpha(t_2) = \alpha_c$ , и учитываем, что  $\exp(-\omega_0 t_2) \ll \exp(\omega_0 t_2)$ . Последнее неравенство справедливо при условии, что выбранный нами угол  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$  удовлетворяет неравенству  $\alpha_c \gg \alpha_m$  (время движения  $t_2$  на втором участке составляет несколько периодов малых колебаний  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ ). Окончательно для времени движения  $t_2$  на втором участке получаем следующее приближенное выражение:

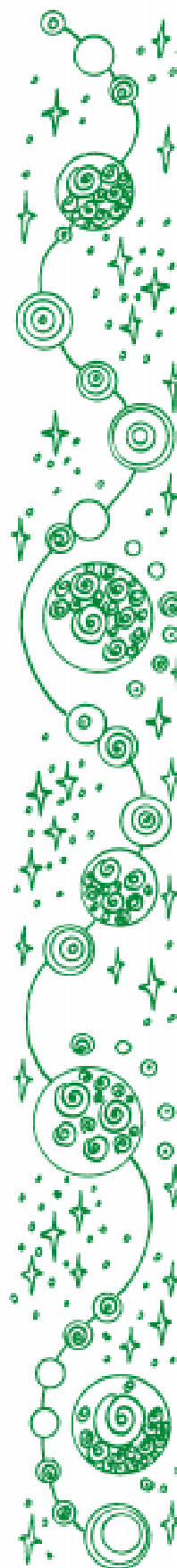
$$t_2 \approx \frac{1}{\omega_0} \ln \frac{2\alpha_c}{\alpha_m}. \quad (11)$$

Полное время движения  $t_1 + t_2$  от нижнего положения до точки поворота  $\varphi_m$  находим, складывая правые части (8) и (11). При сложении из выражения для  $t_1 + t_2$  произвольно выбранный нами угол  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$  выпадает. Это значит, что результат не зависит от выбора точки деления  $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ ; важно лишь, чтобы для  $\alpha_c$  выполнялись неравенства  $\alpha_m \ll \alpha_c \ll 1$ . Так как время  $t_1 + t_2$  составляет четверть периода колебаний маятника с амплитудой  $\varphi_m$ , для периода колебаний с амплитудами  $\varphi_m$ , близкими к  $180^\circ$ , получаем следующую теоретическую оценку:

$$T = 4(t_1 + t_2) \approx \frac{4}{\omega_0} \ln \frac{8}{\alpha_m} = \frac{2T_0}{\pi} \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m}. \quad (12)$$

Для амплитуд  $179,900^\circ$ ,  $179,990^\circ$  и  $179,999^\circ$  расчет по формуле (12) дает значения периодов  $T = 5,37T_0$ ,  $T = 6,83T_0$  и  $T = 8,30T_0$ , соответственно, хорошо согласующиеся с измеренными в моделирующем эксперименте значениями ( $T = 5,5T_0$ ,  $T = 6,8T_0$  и  $T = 8,3T_0$ ). Приближенная формула (12) тем точнее, чем ближе

*Работа с моделирующими программами может составить основу для курсового или дипломного проекта, так как по своему характеру эта работа во многом сходна с небольшим научным исследованием, в котором студент играет активную роль.*





амплитуда  $\varphi_m$  к  $180^\circ$ . Рассмотренный пример отчетливо показывает, как компьютерное моделирование может помочь в построении количественной аналитической теории изучаемого явления.

Практический опыт применения интерактивных моделирующих компьютерных программ свидетельствует, что они способны значительно повысить эффективность изучения разных разделов курса физики. Подчеркнем, что успешное использование таких программ в учебном процессе возможно лишь в комплексе с тщательно подготовленными методическими материалами и специальными учебными пособиями. Компьютерный эксперимент выполняет также и функции контроля за усвоением приобретенных знаний и навыков: полученные при самостоятельном решении теоретических задач результаты студент проверяет на опыте, а не по готовому ответу. Такой подход усиливает эмоциональную сторону учебного процесса и стимулирует познавательный интерес, приближая работу студента по своему характеру к небольшому научному исследованию.

В свете вышеизложенного можно сделать вывод, что включение в учебный процесс на физических и других естественнонаучных специальностях систематических занятий по компьютерному моделированию в той или иной форме (скажем, в форме учебной лаборатории моделирования в качестве дополнения к традиционным формам – лекциям, семинарам и физической лаборатории) представляется своевременным и совершенно необходимым. Весьма перспективно также использование моделирующих программ и сопровождающих их методических материалов в системе дистанционного обучения.

#### Литература.

1. Eugene I. Butikov. Planets and Satellites. Computer simulations. Physics Academic Software. American Institute of Physics, New York (USA), 1998. Web: [http://webassign.net/pasnew/planets\\_and\\_satellites/pands.html](http://webassign.net/pasnew/planets_and_satellites/pands.html). Русскоязычную версию пакета можно загрузить с сайта физического факультета СПбГУ: <http://www.phys.spbu.ru>.

2. Eugene I. Butikov. Physics of Oscillations. Part I. Simple Systems. Physics Academic Software. American Institute of Physics, New York (USA), 1997. Web: [http://webassign.net/pasnew/physics\\_of\\_oscillations/pos.html](http://webassign.net/pasnew/physics_of_oscillations/pos.html). Русскоязычную версию пакета можно загрузить с сайта физического факультета СПбГУ: <http://www.phys.spbu.ru>

3. Китель Ч., Найт У., Рудерман М. Механика. Берклиевский курс физики. М.: «Наука», 1971. Т. I., с. 224–227.



Наши авторы, 2002.  
Our authors, 2002.

*Бутиков Евгений Иванович,  
профессор физического факультета  
СПбГУ.*